

ВИЭПШ



Приложение 1 к рабочей программе дисциплины  
**«Математика»**

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОЛЖСКИЙ ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ, ПЕДАГОГИКИ И ПРАВА»

Экономический факультет

**Методические указания для обучающихся  
по освоению дисциплины  
«Математика»**

Направление подготовки:  
**38.03.01 Экономист**

Направленности (профили) образовательной программы:  
**Бухгалтерский учет, анализ и аудит,  
Корпоративные финансы и банковское дело**

Уровень высшего образования:  
**бакалавриат**

Квалификация выпускника:  
**«бакалавр»**

## **Оглавление**

<b>1. Методические указания для обучающихся по планированию и организации времени, необходимого для освоения дисциплины.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Методические указания по работе обучающихся во время проведения лекций .....</b>	<b>4</b>
<b>3. Методические указания для обучающихся по подготовке к практическим занятиям .....</b>	<b>12</b>
<b>4. Методические указания для обучающихся по организации самостоятельной работы .....</b>	<b>34</b>
<b>4.1. Формы самостоятельной работы .....</b>	<b>34</b>
<b>4.2. Методические указания по выполнению контрольной работы и типового расчета.....</b>	<b>35</b>
<b>4.3. Методические указания по написанию реферата .....</b>	<b>35</b>
<b>4.4. Методические указания по оформлению контрольной работы.....</b>	<b>36</b>
<b>4.5. Методические указания по подготовке научного доклада.....</b>	<b>36</b>
<b>4.6. Методические указания по подготовке научной статьи .....</b>	<b>38</b>
<b>4.7. Методические указания по подготовке презентации .....</b>	<b>40</b>
<b>5. Методические указания для обучающихся по организации и проведению обучения в интерактивных формах .....</b>	<b>40</b>

## **1. Методические указания для обучающихся по планированию и организации времени, необходимого для освоения дисциплины**

Объектами изучения в математике являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты и структуры, коротко называемые математическими моделями. Математика изучает соотношения между безразмерными элементами математических моделей, количественные и качественные связи между ними.

Серьезное изучение математической дисциплины – это большой труд. Его эффективность, как и всякого труда, во многом зависит от его организации. К сожалению, не существует точных рецептов, как надо изучать различные разделы математики, так как методика преподавания математики есть не наука, а искусство. Перед разработкой методики и выработкой достаточно обоснованных рекомендаций стоят большие сложности, ведь принципы, лежащие в их основе, недоказуемы, а основаны на вере. Поэтому оказывается трудно убедить кого – либо в их целесообразности в связи с разными индивидуальными особенностями восприятия и мышления учащихся. Это, конечно, общая проблема, возникающая в процессе обучения по любой дисциплине.

Специфика, относящаяся к изучению математики, состоит в том, что одни лучше воспринимают понятия при кратком их описании, другие же при обстоятельном всестороннем их описании, одним свойствен подход снизу от частного к общему (индуктивный), другим подход сверху от общего к частному (дедуктивный), одним конструктивный, другим аксиоматический подход, одним логически обоснованный, другим интуитивный, одним аналитический, другим геометрический и т. д. и т. п.

Существенно различна и скорость усвоения информации у различных людей. Более того, именно этим качеством они в основном отличаются друг от друга как учащиеся. Безусловно, все это невозможно учесть, и невозможно создать такой курс лекций или написать такой учебник, чтобы для каждого учащегося они имели оптимальный характер с точки зрения усвоения им изложенного материала.

К сказанному можно добавить, что методика чтения лекций по математике перед аудиторией существенно отличается от методики написания учебника и зависит и от числа слушателей (большая разница, как читать лекцию, если слушателей десять, сто или двести), и от уровня их подготовки, и от многих других причин. Материал для лекционного курса должен быть тщательно отобран так, чтобы он содержал все принципиальное и необходимое, несмотря на его меньший, как правило, по сравнению с учебником объем.

Для студента обычно бывает достаточно сведений, излагаемых на лекции, т. е. студент может и не читать учебников. В этом нет ничего плохого, так как усвоение хорошо изложенных лекций является и прекрасным способом подготовки для работы с книгой.

Общая трудоемкость дисциплины, состоящей из четырех, связанных между собой, разделов, составляет 10 зачетных единиц, 360 академических часов (1-2 семестры). Раздел 1 «Линейная алгебра», Раздел 2 «Аналитическая геометрия», Раздел 3 «Математический анализ», Раздел 4 «Дифференциальные уравнения». Изучение дисциплины завершается экзаменом.

Разделы, состоящие из отдельных тем, изучаются на лекциях, на практических занятиях и в процессе самостоятельной работы. На лекциях излагается содержание курса с примерами, разъясняющими основные математические понятия и определения. На практических занятиях студенты овладевают методами решения и исследования математических задач на основании теоретических положений дисциплины. Самостоятельная работа состоит из освоения теории, выполнения общих практических заданий и подготовки к написанию аудиторных контрольных работ.

## **2. Методические указания по работе обучающихся во время проведения лекций**

Преподавателю, ведущему курс, рекомендуется на вводной лекции определить структуру курса, пояснить цели и задачи изучения дисциплины, сформулировать основные вопро-

сы и требования к результатам освоения. При рассмотрении темы важно выделить основные понятия и определения, желательна их визуализация.

В подборе материала к занятиям следует руководствоваться рабочей программой учебной дисциплины, обращая внимание на компетенции, указанные в федеральном государственном образовательном стандарте высшего образования. На первом занятии преподаватель обязан довести до обучающихся требования к текущей и итоговой аттестации, порядок работы в аудитории и нацелить их на проведение самостоятельной работы с учетом количества часов, отведенных на нее учебным планом.

Рекомендуя литературу для самостоятельного изучения, преподаватель должен максимально использовать возможности, предлагаемые библиотекой ВИЭПП, в том числе ее электронными ресурсами, а также делать акцент на привлечение ресурсов Интернет.

Выбор методов и форм обучения может определяться:

- общими целями образования, воспитания, развития и психологической подготовки обучающихся;
- особенностями методики преподавания конкретной учебной дисциплины и спецификой ее требований к отбору дидактических методов;
- целями, задачами и содержанием материала конкретного занятия;
- временем, отведенным на изучение того или иного материала;
- уровнем подготовленности обучающихся;
- уровнем материальной оснащенности, наличием оборудования, наглядных пособий, технических средств;
- уровнем подготовленности и личных качеств самого преподавателя.

Лекции должны давать систематизированные основы научных знаний по дисциплине, концентрировать внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах. Лекции следует излагать в традиционном или в проблемном стиле: ставить вопросы и предлагать подходы к их решению. Необходимо стимулировать активную познавательную деятельность и интерес к дисциплине, формировать творческое мышление, прибегать к противопоставлениям и сравнениям, делать обобщения, активизировать внимание обучаемых путем постановки проблемных вопросов, стимулировать их мыслительную деятельность, раскрывая взаимосвязи между различными явлениями, поощрять дискуссию.

В современных условиях методический арсенал лекции существенно пополнился информационными и техническими средствами обучения, что позволяет разнообразить материал и расширить каналы его передачи, используя лекцию-визуализацию, в результате чего дополнительное качество усвоения теоретического материала достигается за счет применения принципа наглядности в обучении.

В лекции следует широко использовать принцип эвристичности, что позволит более глубоко изучить проблему, поскольку возникающие противоречия легко разрешаются в ходе коллективного обсуждения. Эвристическое изложение материала предполагает постановку проблемных вопросов. Проблемный вопрос содержит в себе диалектическое противоречие, которое и является «пусковым механизмом» процессов мышления, активизирует стремление найти ответ на вопрос (он становится своего рода самостоятельной познавательной задачей).

Проблемная лекция побуждает аудиторию к активному включению в усвоение и обсуждение материала. Нахождение ответов на неоднозначные вопросы стимулирует развитие творческого мышления.

Вопросы, предлагаемые аудитории для размышления, должны побуждать обучаемых использовать имеющиеся знания. В конце лекции необходимо делать выводы и ставить задачи на самостоятельную работу.

Во время лекционных занятий рекомендуется вести конспектирование учебного материала, обращать внимание на формулировки и категории, раскрывающие суть того или иного явления или процессов, научные выводы и практические рекомендации.

**Тематика лекционных занятий  
Первый семестр**



## **Лекция 1. Матрицы и определители.**

*Вопросы:*

1. Числовые матрицы. Основные понятия.
2. Линейные операции и их свойства.

*Ключевые понятия:* числовые матрицы и их виды: прямоугольные, квадратные, диагональные; скалярная, единичная, нулевая матрицы; порядки и размеры матрицы; линейные операции над матрицами.

## **Лекция 2. Матрицы и определители.**

*Вопросы:*

1. Нелинейные операции над матрицами и их свойства.
2. Определители квадратных матриц.
3. Свойства определителей.

*Ключевые понятия:* произведение матриц, степень матрицы, транспонирование матрицы, перестановочные матрицы, делители нуля, симметрические матрицы, минор элемента матрицы, символ и индекс суммирования, правило Сарруса, теорема разложения определителя, алгебраическое дополнение элемента определителя, формулы Лапласа.

## **Лекция 3. Матрицы и определители.**

*Вопросы:*

1. Обратная матрица.
2. Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом обратной матрицы и по формулам Крамера.

*Ключевые понятия:* определение обратной матрицы, невырожденные и вырожденные матрицы, присоединенная матрица, определитель линейной системы, вспомогательные определители системы, матричное уравнение и его решение, формулы Крамера.

## **Лекция 4. Системы линейных уравнений.**

*Вопросы:*

1. Основные понятия.
2. Элементарные преобразования матриц и систем линейных уравнений.
3. Метод Гаусса.

*Ключевые понятия:* линейная система, коэффициенты и свободные члены системы, неоднородная и однородная системы, решение системы, совместная и несовместная системы, определенная и неопределенная системы, матрица и расширенная матрица системы, равносильные системы, нулевое и противоречивое уравнения системы, элементарные преобразования матриц и линейных систем, метод исключения неизвестных, шаги процесса Гаусса, треугольная матрица, трапециевидная матрица, прямой и обратный ход.

## **Лекция 5. Системы линейных уравнений.**

*Вопросы:*

1. Система линейных уравнений с базисом. Метод Жордана – Гаусса.
2. Ранг матрицы и его вычисление методом Жордана – Гаусса.
3. Условие совместности системы линейных уравнений.

*Ключевые понятия:* система с базисом, базисные неизвестные, свободные неизвестные, общее решение, частное решение, базисное решение, минор  $k$  – го порядка матрицы, ранг матрицы, расширенная матрица системы, теорема Кронекера – Капели.

## **Лекция 6. Системы линейных уравнений.**

*Вопросы:*

1. Исследование однородной линейной системы.
2. Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы.

*Ключевые понятия:* однородная линейная система, тривиальное (нулевое) решение, определитель однородной системы, собственные значения и собственные векторы матрицы, характеристическое уравнение и характеристический многочлен матрицы.

## **Лекция 7. Метод координат.**

*Вопросы:*

1. Предмет и метод аналитической геометрии.
2. Декартовы координаты на прямой и на плоскости.

*Ключевые понятия:* координатная ось, начало координат, декартова система координат, направленный отрезок и его величина, декартовы координаты точки, абсцисса и ордината.

### **Лекция 8. Метод координат. Прямая линия.**

*Вопросы:*

1. Две простейшие задачи на плоскости: расстояние между двумя точками: деление отрезка в данном отношении.
2. Линии на плоскости и их уравнения. Два типа задач, связанных с аналитическим представлением линии. Алгебраические линии 1-го и 2-го порядка.

*Ключевые понятия:* формула расстояния между двумя точками, теорема Пифагора, теорема Фалеса, формулы деления отрезка в данном отношении, геометрическое место точек плоскости, определение уравнения с двумя переменными, определение уравнения линии, текущие координаты точки, параметрические уравнения линии, степень уравнения и порядок алгебраической линии.

### **Лекция 9. Прямая линия.**

*Вопросы:*

1. Угол наклона и угловой коэффициент прямой. Различные виды уравнения прямой.
2. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
3. Расстояние от точки до прямой.

*Ключевые понятия:* угол наклона прямой, угловой коэффициент прямой, угловой коэффициент отрезка, пучок прямых с центром в данной точке, уравнение прямой в отрезках на осях, общее уравнение прямой, неполные уравнения прямой, угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, формула тангенса угла между двумя прямыми, формула расстояния от точки до прямой.

### **Лекция 10. Кривые второго порядка.**

*Вопросы:*

1. Общее уравнение линий второго порядка.
2. Окружность.
3. Эллипс и его свойства.
4. Гипербола и ее свойства.
5. Парабола.

*Ключевые понятия:* кривые второго порядка, определение окружности, определение эллипса, фокусы эллипса, канонические уравнения окружности и эллипса, вершины и оси эллипса и гиперболы, фокусное расстояние, эксцентриситет, фокальные радиусы, ветви и асимптоты гиперболы, основной прямоугольник гиперболы, директриса и фокальный параметр параболы.

### **Лекция 11. Векторная алгебра.**

*Вопросы:*

1. Скаляры и векторы. Коллинеарность и равенство векторов.
3. Линейные операции над векторами и их свойства.

*Ключевые понятия:* определение вектора, коллинеарные векторы, свободный вектор, правило треугольника и правило параллелограмма, противоположный вектор, единичный вектор (орт), модуль и величина вектора.

### **Лекция 12. Векторная алгебра.**

*Вопросы:*

1. Декартовы координаты точки и ее радиус-вектора в пространстве. Длина и направляющие косинусы радиус-вектора.
2. Координаты, длина и направляющие косинусы вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме.

*Ключевые понятия:* декартова прямоугольная система координат в пространстве, координатные плоскости, декартовы координаты точки и её радиуса – вектора, ортонормированный базис пространства векторов, составляющие вектора и проекции вектора, условие коллинеарности векторов, направляющие косинусы вектора.

### **Лекция 13. Векторная алгебра. Плоскость и прямая в пространстве.**

*Вопросы:*

1. Скалярное произведение и его свойства.
2. Уравнение плоскости.
3. Расстояние от точки до плоскости.

*Ключевые понятия:* угол между двумя векторами, скалярное произведение в векторной и в координатной формах, проекция вектора на вектор, условие ортогональности двух векторов, нормальный вектор плоскости, общее уравнение плоскости, неполные уравнения плоскости.

### **Лекция 14. Плоскость и прямая в пространстве.**

*Вопросы:*

1. Уравнения прямой в пространстве.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости.

*Ключевые понятия:* общие, канонические, параметрические уравнения прямой; направляющий вектор прямой; направляющие коэффициенты прямой; условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости; точка пересечения прямой и плоскости; условия принадлежности прямой к плоскости.

### **Лекция 15. Функция. Предел и непрерывность функции.**

*Вопросы:*

1. Понятие множества. Промежутки. Логические символы.
2. Определение функции и основные способы её задания. Основные элементарные, сложные и элементарные функции.
3. Окрестность точки. Предел переменной.
4. Предел функции в точке. Односторонние пределы.

*Ключевые понятия:* множество, конечные и бесконечные промежутки, логические символы, функция, аргумент функции, основные элементарные или простейшие функции, сложная функция, суперпозиция функций, элементарные функции, окрестность точки, радиус окрестности, неограниченно приближается, переменная стремится к пределу, переменная стремится к бесконечности, предел функции в точке, предел слева, предел справа.

### **Лекция 16. Предел и непрерывность функции.**

*Вопросы:*

1. Предел функции на бесконечности. Односторонние пределы на бесконечности.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их основные свойства.
3. Формулировки основных теорем о пределах функций. Неопределённости четырёх основных видов.
4. Первый и второй замечательные пределы.

*Ключевые понятия:* переменная стремится к бесконечности, предел слева, предел справа, бесконечно малая функция, бесконечно большая функция, пределы арифметических действий над функциями; неопределённости вида  $(0/0)$ ,  $(\infty/\infty)$ ,  $(\infty-\infty)$ ,  $(0\cdot\infty)$ ; раскрытие неопределённости, бесконечно малый аргумент, два замечательных предела, неопределённости вида  $(1^\infty)$ .

### **Лекция 17. Предел и непрерывность функции.**

*Вопросы:*

1. Точки непрерывности и точки разрыва функции. Точки разрыва первого и второго рода, точка устранимого разрыва.
2. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема Больцано – Коши, теорема Вейерштрасса.



*Ключевые понятия:* непрерывность функции, предел и значение функции в точке, непрерывность в точке слева и справа, точка разрыва 1-го рода, скачок функции, точка устранимого разрыва, точка разрыва 2-го рода, теорема Больцано – Коши, теорема Вейерштрасса.

### **Лекция 18. Производная и дифференциал.**

*Вопросы:*

1. Определение производной, её геометрический и физический смысл.
2. Дифференцируемость и непрерывность функции. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.
3. Правила дифференцирования элементарных функций.
4. Производная неявной функции.

*Ключевые понятия:* приращение аргумента, приращение функции, предел отношения приращения функции к приращению аргумента, секущая, касательная, угловой коэффициент касательной, скорость при прямолинейном движении, дифференцируемость функции в точке и на интервале, производная алгебраической суммы функций, производная произведения и частного двух функций, производная сложной и неявной функции.

## **Второй семестр**

### **Лекция 1. Производная и дифференциал.**

*Вопросы:*

1. Дифференциал функции. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями.
2. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический смысл производной второго порядка.

*Ключевые понятия:* главная линейная часть приращения функции, дифференциал аргумента, отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента, ускорение точки при прямолинейном движении.

### **Лекция 2. Производная и дифференциал.**

*Вопросы:*

1. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа, Лопиталя.

*Ключевые понятия:* дифференцируемая функция, наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции, формулы Лагранжа конечных и бесконечно малых приращений функции, правило Лопиталя раскрытия неопределённостей.

### **Лекция 3. Исследование функций.**

*Вопросы:*

1. Определение монотонных функций. Достаточные условия монотонности.
2. Точки экстремума и экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции.

*Ключевые понятия:* постоянные, возрастающие, убывающие функции; геометрический смысл достаточных условий монотонности функций; точки максимума и точки минимума; стационарные точки и критические точки 1-го рода; гладкий и острый экстремум функции, изменение углов наклона касательных к кривой с острых углов на тупые углы при переходе через точку максимума и с тупых углов на острые углы при переходе через точку минимума.

### **Лекция 4. Исследование функций.**

*Вопросы:*

1. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба графика.
2. Асимптоты графика функции.
3. План полного исследования функции и построения её графика.

*Ключевые понятия:* график выпуклый, график вогнутый; расположение касательной относительно графика; точки перегиба графика, критические точки 2 – го рода; вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика, область определения и точки разрыва

функции; чётность или нечётность функции; наличие асимптот; интервалы монотонности, точки экстремума и экстремумы; интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба; точки пересечения графика с осями координат.

#### **Лекция 5. Функции нескольких переменных.**

*Вопросы:*

1. Основные понятия о функциях нескольких переменных.

*Ключевые понятия:* функция двух переменных, независимые и зависимая переменные, область определения и множество значений функции, окрестность точки, внутренние и граничные точки области, замкнутая и незамкнутая область, ограниченная и неограниченная область, функция  $n$  переменных.

#### **Лекция 6. Функции нескольких переменных.**

*Вопросы:*

1. Предел функции двух переменных. Основные теоремы о пределах.

*Ключевые понятия:* окрестность точки, стремление точки  $M(x; y)$  к точке по любому пути, предел функции по обоим переменным, предел функции по каждой переменной в отдельности, бесконечно малая и бесконечно большая функции двух переменных, неопределённости четырёх основных видов.

#### **Лекция 7. Функции нескольких переменных.**

*Вопросы:*

1. Непрерывность функции двух переменных. Основные свойства непрерывных функций.

2. Частные приращения и частные производные функции нескольких переменных.

*Ключевые понятия:* предел функции в точке и значение функции в точке, точки и линии разрыва функции, непрерывность в области, ограниченность непрерывной функции, наибольшее и наименьшее значения функции непрерывной в замкнутой ограниченной области, частные приращения и частные производные, физический смысл частных производных.

#### **Лекция 8. Функции нескольких переменных.**

*Вопросы:*

1. Полное приращение и полный дифференциал функции двух переменных.
2. Производная по направлению и градиент функции двух переменных.

*Ключевые понятия:* приращение функции по обоим переменным, формула полного приращения функции двух переменных, дифференцируемая функция, главная линейная часть полного приращения, производная по направлению, градиент функции, линии уровня функции двух переменных.

#### **Лекция 9. Неопределенный интеграл.**

*Вопросы:*

1. Первообразная и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла.
2. Таблица неопределённых интегралов. Метод непосредственного интегрирования.

*Ключевые понятия:* первообразная, неопределённый интеграл как общий вид всех первообразных, переменная интегрирования, подынтегральная функция, таблица интегралов, методы интегрирования, интегральная кривая.

#### **Лекция 10. Неопределенный интеграл.**

*Вопросы:*

1. Метод интегрирования заменой переменной.
2. Метод интегрирования по частям.

*Ключевые понятия:* формула замены переменной в неопределённом интеграле, метод подстановки, линейные подстановки, обращение правила дифференцирования произведения двух функций; формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла; три группы интегралов, берущихся методом интегрирования по частям; приведение интеграла к самому себе методом интегрирования по частям.

#### **Лекция 11. Неопределенный интеграл.**

*Вопросы:*

1. Специальные приемы интегрирования некоторых тригонометрических функций.

*Ключевые понятия:* основные тригонометрические тождества, произведения четных и нечетных степеней синуса и косинуса одного аргумента, формулы понижения четной степени синуса и косинуса, формулы преобразования произведений синуса и косинуса в алгебраические суммы тригонометрических функций, подведение линейной функции под знак дифференциала.

## **Лекция 12. Неопределенный интеграл.**

*Вопросы:*

1. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен.
2. Интегрирование простейших иррациональных функций. Понятие о неберущихся интегралах.

*Ключевые понятия:* выделение полного квадрата из квадратного трехчлена, линейные подстановки, метод интегрирования заменой переменной, метод интегрирования рационализацией подынтегрального выражения.

## **Лекция 13. Определенный интеграл.**

*Вопросы:*

1. Определение определённого интеграла как предела интегральной суммы. Теорема существования определённого интеграла.
2. Основные свойства определённого интеграла.

*Ключевые понятия:* интегральная сумма и её геометрический смысл, предел интегральной суммы.

## **Лекция 14. Определенный интеграл.**

*Вопросы:*

1. Вычисление определённого интеграла.
2. Несобственные интегралы первого рода.

*Ключевые понятия:* формула Ньютона-Лейбница, формула замены переменной в определённом интеграле, интегралы от чётных и нечётных функций по симметричному промежутку, формула интегрирования по частям для определённого интеграла, несобственный интеграл первого рода как интеграл от непрерывной функции по бесконечному промежутку, сходимость и расходимость несобственного интеграла, обобщенные формулы Ньютона-Лейбница.

## **Лекция 15. Определенный интеграл.**

*Вопросы:*

1. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Вычисление площади плоской фигуры.

*Ключевые понятия:* криволинейная трапеция, геометрический смысл определённого интеграла от неотрицательной функции, формула площади криволинейной трапеции, формула площади плоской фигуры.

## **Лекция 16. Дифференциальные уравнения первого порядка.**

*Вопросы:*

1. Основные понятия дифференциальных уравнений 1-го порядка.
2. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

*Ключевые понятия:* дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, уравнения с частными производными, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальное уравнение первого порядка, область определения уравнения, решение уравнения, интегральная кривая, общее решение уравнения, частное решение уравнения, задача Коши, начальное условие, геометрический смысл задачи Коши, теорема Пикара, особое решение; уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

**Лекция 17. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.**

*Вопросы:*



1. Основные понятия дифференциальных уравнений 2-го порядка.
2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

*Ключевые понятия:* дифференциальное уравнение второго порядка, область определения уравнения, решение, общее решение и частное решение уравнения, задача Коши, начальное условие, геометрический смысл задачи Коши, уравнение вида  $y'' = f(x)$ , уравнение вида  $F(x; y'; y'') = 0$ , уравнение вида  $F(y; y'; y'') = 0$ .

### **Лекция 18. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

*Вопросы:*

1. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
2. Свойства решений линейных уравнений.
3. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

*Ключевые понятия:* линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, однородное и неоднородное уравнения; свойства однородных уравнений, линейно зависимые и независимые решения, определитель Вронского, характеристическое уравнение, действительные и комплексные корни характеристического уравнения, метод неопределенных коэффициентов, правая часть уравнения вида  $f(x) = e^{ax} P_n(x)$ , правая часть вида  $f(x) = e^{ax} (P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ .

### **3. Методические указания для обучающихся по подготовке к практическим занятиям**

1. Чтение конспекта лекций и учебника должно сопровождаться практическим решением и исследованием математических задач на основании теоретических положений дисциплины, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь. Если студент видит несколько путей для решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения. Решения задач и примеров следует излагать подробно, обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, логарифмов, числа  $\pi$  и т.п. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями и указанием масштаба. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путём вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром и лекалом.

2. Решение каждого задания должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее букв.

3. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим, геометрическим или экономическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении. Однако следует предостеречь от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается студентом как признак хорошего усвоения теории. Правильное решение задачи часто получается в результате применения механически заученных формул и указаний по их использованию без понимания сущности. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но явно недостаточным условием хорошего знания теории.

5. Если при решении практических задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, он может обратиться к преподавателю для получения от



него указаний в виде письменной или устной консультаций. В своих запросах студент должен точно указывать, в чем он испытывает затруднение при решении задачи, каков характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения. За консультацией следует обращаться и в случаях, если возникнут сомнения в правильности ответов решаемых задач или в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

### Тематика практических занятий

#### Первый семестр

#### Занятие 1. Матрицы и определители.

*Вопросы:*

1. Операции над матрицами и их свойства.

*Ключевые понятия:* линейные операции: сложение и вычитание матриц, умножение числа на матрицу; нелинейные операции: умножение, возведение в целую положительную степень, транспонирование матриц; основные свойства нелинейных операций.

*Задания:*

1. Дано:  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Найдите:

а)  $A + B$ ;

б)  $2B - 5A$ ;

в)  $2A^T + 3B^T$ .

2. Дано:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Найдите:

а)  $AB$ ;

б)  $A^T B^T$ .

3. Найдите произведения:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. Дано:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ . Найдите  $A^2$  и  $A^4$ .

5. Найдите произведения:

а)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ;

б)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

6. Дано:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Проверьте, что:

а)  $A(BC) = (AB)C$ ;

б)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

#### Занятие 2. Матрицы и определители.

*Вопросы:*

1. Определители, их свойство и вычисление.

*Ключевые понятия:* главная и побочная диагонали квадратной матрицы, минор и алгебраическое дополнение элемента определителя, правило Сарруса, теорема разложения, формулы Лапласа, вычисление определителя на основании свойств обнуливании элементов строки или столбца.

*Задания:*

1. Дано:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ . Проверьте, что  $AB \neq BA$ , но  $|AB| = |BA| = |A| |B|$ .

2. Вычислите определители по определению:

а)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ ;

б)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ .

3. Вычислите определители по правилу Сарруса:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислите по теореме разложения, используя ряд с наибольшим числом нулей:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислите определитель, обнулив предварительно какой – либо ряд, а затем разложив определитель по этому ряду:

$$a) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 10 \\ 7 & 14 & 21 & -7 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

### Занятие 3. Матрицы и определители.

*Вопросы:*

1. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.

2. Решение системы 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными по формулам Крамера и методом обратной матрицы.

*Ключевые понятия:* единичная матрица, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрицы, алгебраические дополнения элементов матрицы, присоединённая матрица, матричное уравнение и его решение, определитель линейной системы, вспомогательные определители, формулы Крамера.

*Задания:*

1. Дано:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ . Найдите  $A^{-1}$ .

2. Решите матричные уравнения  $AX = B$ ,  $YA = B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

3. Дано:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ . Найдите  $A^{-1}$ .

4. Решите систему  $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$  по формулам Крамера и методом обратной матрицы.

рицы.

### Занятие 4. Системы линейных уравнений.

*Вопросы:*

1. Решение линейных систем методом Гаусса.

*Ключевые понятия:* метод исключения неизвестных, шаги процесса Гаусса, элементарные преобразования матриц и линейных систем, равносильные системы, нулевое и противоречивое уравнения системы, расширенная матрица системы, треугольная матрица, трапециевидная матрица, прямой и обратный ход процесса Гаусса.

*Задания:*

1. Решите системы уравнений методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

2. Решите матричные уравнения:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$б) X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Занятие 5. Системы линейных уравнений.

*Вопросы:*

1. Решение линейных систем методом Жордана – Гаусса.
2. Вычисление ранга матрицы методом Жордана – Гаусса.
3. Исследование совместности линейных систем по теореме Кронекера – Капелли.

*Ключевые понятия:* линейная система с базисом, базисные неизвестные, свободные неизвестные, общее решение, частное решение, базисное решение, минор  $k$  – го порядка матрицы, определение ранга матрицы, метод Жордана – Гаусса элементарных преобразований матрицы, ранг матрицы системы, ранг расширенной матрицы, формулировка теоремы Кронекера – Капелли, несовместная система, определённая система, неопределённая система.

*Задания:*

1. Найдите базисные решения системы уравнений методом Жордана – Гаусса:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

2. Установите совместность систем:

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

### Занятие 6. Системы линейных уравнений.

*Вопросы:*

1. Вычисление собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы.

*Ключевые понятия:* однородная линейная система, определитель однородной системы, собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы, характеристическое уравнение и характеристический многочлен матрицы, метод Жордана – Гаусса.

*Задания:*

1. Найдите собственные значения и собственные векторы матриц:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix};$$

$$г) \begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$д) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

### Занятие 7. Метод координат.

*Вопросы:*

1. Декартовы координаты точки на прямой и на плоскости.

2. Две простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.

3. Составление уравнения линии как геометрического места точек, обладающих заданным свойством.

**Ключевые понятия:** декартовы координаты на прямой, величина и длина отрезка на прямой, декартовы координаты точки на плоскости, формула расстояния между двумя точками, формулы деления отрезка в данном отношении, определение уравнения с двумя переменными, определение уравнения линии, текущие координаты точки линии, канонические уравнения кривых второго порядка.

**Задания:**

1. Постройте на числовой прямой точки  $A(-5)$ ,  $B(4)$  и  $C(-2)$  и найдите величины  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  отрезков  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  и  $\overline{AC}$ . Проверьте, что  $AB + BC = AC$ .

2. Найти величину  $AB$  и длину  $|AB|$  отрезка  $\overline{AB}$ , заданного точками:

а)  $A(5)$  и  $B(2)$ ;

б)  $A(-5)$  и  $B(-3)$ .

3. Вычислите координату точки  $A$ , если известны:

а)  $B(-5)$  и  $BA = -3$ ;

б)  $B(2)$  и  $|AB| = 3$ .

4. Определите, в каких четвертях может быть расположена точка  $M(x; y)$ , если:

а)  $xy < 0$ ;

б)  $x + y = 0$ ;

в)  $x + y < 0$ ;

г)  $x - y < 0$ .

5. Даны точки  $A(0; 0)$ ,  $B(3; -4)$ ,  $C(-3; 4)$ ,  $D(-2; 2)$  и  $E(10; -3)$ . Определите расстояние  $d$  между точками:

а)  $A$  и  $B$ ;

б)  $B$  и  $C$ .

6. Отрезок, ограниченный точками  $A(1; -3)$  и  $B(4; 3)$ , разделен на три равные части. Определите координаты точек деления.

7. Прямая проходит через точки  $M(2; -3)$  и  $N(-6; 5)$ . Найдите на этой прямой точку, ордината которой равна  $-5$ .

8. Напишите уравнение линии, по которой движется точка  $M(x; y)$ , равноудаленная от точек  $A(0; 2)$  и  $B(4; -2)$ .

9. Напишите уравнение множества точек, сумма расстояний каждой из которых от точек  $F_1(2; 0)$  и  $F_2(-2; 0)$  равна  $2\sqrt{5}$ .

10. Напишите уравнение траектории точки  $M(x; y)$ , которая при своем движении остается вдвое ближе к точке  $A(0; -1)$ , чем к точке  $B(0; 4)$ .

### **Занятие 8. Прямая линия.**

**Вопросы:**

1. Уравнение прямой: а) проходящей через данную точку в данном направлении; б) с угловым коэффициентом; в) проходящей через две данные точки; г) общее уравнение прямой.

2. Уравнение пучка прямых.

3. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.

**Ключевые понятия:** определение угла наклона и углового коэффициента прямой, угловой коэффициент отрезка, неполные уравнения прямой, значения тангенса некоторых углов, формулы деления отрезка пополам, понятие и уравнение пучка прямых, определение угла между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.

**Задания:**

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси  $Oy$  отрезок  $b = 3$  и образующей с осью  $Ox$  угол: а)  $45^\circ$ ; б)  $135^\circ$ . Постройте эти прямые.

2. Определите параметры  $k$  и  $b$  для каждой из прямых:

а)  $2x - 3y = 6$ ;

б)  $2x + 3y = 0$ ;

в)  $y = -3$ ;

г)  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ .

3. Постройте прямые:

а)  $3x + 4y = 12$ ;

б)  $3x - 4y = 0$ ;



в)  $2x - 5 = 0$ ;

г)  $2y + 5 = 0$ .

4. Определите параметры  $k$  и  $b$  прямой, проходящей через точку  $A(2; 3)$  и составляющей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ . Составьте уравнение этой прямой.

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку  $A(4; 3)$  и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3 кв. ед.

6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-1; 3)$  и  $B(4; -2)$ .

7. Напишите уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$  и отсекающей на оси  $Ox$  отрезок, равный: а) 4; б)  $-5$ ; в) 0.

8. Напишите уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$  и отсекающей на оси  $Oy$  отрезок, равный: а) 6; б)  $-2$ ; в) 0.

9. Определите угол между прямыми:

а)  $y = 2x - 3$  и  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ;

б)  $2x + y = 0$  и  $y = 3x - 4$ ;

10. Среди прямых  $3x - 2y + 7 = 0$ ,  $6x - 4y - 9 = 0$ ,  $6x + 4y - 5 = 0$ ,  $2x + 3y - 6 = 0$  укажите параллельные и перпендикулярные.

11. В треугольнике с вершинами  $A(-2; 0)$ ,  $B(2; 6)$  и  $C(4; 2)$  проведены высота  $BD$  и медиана  $BE$ . Напишите уравнение стороны  $AC$ , медианы  $BE$  и высоты  $BD$ .

12. Напишите уравнение прямой, если точка  $A(2; 3)$  служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

13. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку  $A(5; -4)$  и составляющей с осью  $Ox$  тот же угол, что и прямая  $5x + 2y - 3 = 0$ .

### **Занятие 9. Прямая линия.**

*Вопросы:*

1. Расстояние от точки до прямой.

2. Смешанные задачи на прямую.

*Ключевые понятия:* формула расстояния от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми, определение высоты треугольника, уравнение пучка прямых с центром в данной точке; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; общее уравнение прямой; точка пересечения двух прямых; формулы деления отрезка пополам; условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

*Задания:*

1. Покажите, что прямые  $2x - 3y - 6 = 0$  и  $4x - 6y - 25 = 0$  параллельны и найдите расстояние между ними.

2. Найдите длину высоты  $BD$  в треугольнике с вершинами  $A(-3; 0)$ ,  $B(2; 5)$  и  $C(3; 2)$ .

3. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку  $(-1; 1)$  так, чтобы середина ее отрезка между прямыми  $x + 2y - 1 = 0$  и  $x + 2y - 3 = 0$  лежала на прямой  $x - y - 1 = 0$ .

4. В треугольнике  $ABC$  даны: а) уравнение стороны  $AB$   $3x + 2y = 12$ ; б) уравнение высоты  $BM$   $x + 2y = 4$ ; в) уравнение высоты  $AM$   $4x + y = 6$ , где  $M$  – точка пересечения высот. Напишите уравнения сторон  $AC$ ,  $BC$  и высоты  $CM$ .

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку  $M$  пересечения прямых  $5x - y + 10 = 0$  и  $8x + 4y + 9 = 0$  и параллельной прямой  $x + 3y = 0$ .

### **Занятие 10. Кривые второго порядка.**

*Вопросы:*

1. Кривые второго порядка: окружность.

2. Эллипс.

*Ключевые понятия:* общее уравнение линий второго порядка; условия, при которых общее уравнение определяет окружность; выделение полных квадратов в общем уравнении линий второго порядка; центр и радиус окружности; каноническое уравнение окружности; формулы деления отрезка пополам; точки пересечения линий; решение систем линейных уравнений, определение и каноническое уравнение эллипса; фокусы, полуоси, эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса.

*Задания:*

1. Постройте окружности: а)  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ ; б)  $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ .
2. Дана точка  $A(-2; 3)$ . Напишите уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок  $OA$ .
3. Окружность касается оси  $Ox$  в начале координат и проходит через точку  $A(0; 4)$ . Напишите уравнение окружности и найти точки пересечения её с биссектрисами координатных углов.
4. Найдите центр и радиус окружности, проходящей через точки  $A(-1; 5)$ ,  $B(-2; -2)$  и  $C(5; 5)$ .
5. Постройте эллипс  $3x^2 + 16y^2 = 192$ . Найдите: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет.
6. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что: а) большая полуось  $a = 6$ , а эксцентриситет  $\varepsilon = 0,5$ ; б) расстояние между фокусами равно 6, а  $a + b = 9$ .
7. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки  $M_1(2; 3)$  и  $M_2\left(1; \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ .
8. Эллипс проходит через точку  $M(-4; \sqrt{21})$  и имеет эксцентриситет  $\varepsilon = \frac{3}{4}$ . Напишите уравнение эллипса и найдите фокальные радиусы точки  $M$ .
9. На эллипсе  $9x^2 + 25y^2 = 225$  найдите точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.
10. Определите траекторию точки  $M$ , которая при своем движении остается вдвое ближе к точке  $F(-1; 0)$ , чем к прямой  $x = -4$ .

### **Занятие 11. Кривые второго порядка.**

*Вопросы:*

1. Гипербола.
2. Парабола.

*Ключевые понятия:* определения и канонические уравнения гиперболы и параболы; фокусы, полуоси, эксцентриситет, асимптоты и фокальные радиусы гиперболы; директриса и фокальный параметр параболы

*Задания:*

1. Постройте гиперболу  $3x^2 - 4y^2 = 12$ . Найдите: а) действительную и мнимую полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот.
2. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что: а) действительная полуось  $a = 2\sqrt{5}$ , а эксцентриситет  $\varepsilon = \sqrt{1,2}$ ; б) расстояние между фокусами  $2c = 20$ , а уравнение асимптот  $y = \pm \frac{4}{3}x$ .
3. На гиперболе  $x^2 - 4y^2 = 16$  взята точка  $M$  с ординатой, равной 1. Найдите расстояние ее от фокусов.
4. Напишите уравнение параболы: а) проходящей через точки  $(0; 0)$  и  $(1; -3)$  и симметричной относительно оси  $Ox$ ; б) проходящей через точки  $(0; 0)$  и  $(2; -4)$  и симметричной относительно оси  $Oy$ .
5. Напишите уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой  $x + y = 0$  и окружности  $x^2 + y^2 + 4y = 0$  и симметрична относительно оси  $Oy$ .
6. На параболе  $y^2 = 6x$  найдите точку, фокальный радиус которой равен 4,5.
7. Напишите уравнение множества точек, одинаково удаленных от точки  $F(0; 2)$  и от прямой  $y = 4$ . Найдите точки пересечения этой кривой с осями координат и построьте ее.

### **Занятие 12. Векторная алгебра.**

*Вопросы:*

1. Декартовы координаты, длина и направляющие косинусы вектора.

2. Линейные операции над векторами в координатной форме. Разложение вектора по базису на плоскости.

*Ключевые понятия:* декартовы координаты точки и вектора в пространстве, длина и направляющие косинусы вектора, линейные операции в координатной форме, условия равенства и коллинеарности векторов, понятие базиса на плоскости, линейная комбинация векторов, разложение вектора по базису.

*Задания:*

1. Даны точки  $A(1; 2; 3)$  и  $B(3; -4; 6)$ . Найдите длину и направляющие косинусы вектора  $\overline{AB}$ .

2. Даны две координаты вектора:  $X = 4$ ,  $Y = -12$ . Определите его третью координату  $Z$  при условии, что  $|\overline{a}| = 13$ .

3. Определите начало вектора  $\overline{a} = \{2; -3; -1\}$ , если его конец совпадает с точкой  $(1; -1; 2)$ .

4. Вектор составляет с осями  $Ox$  и  $Oz$  углы  $\alpha = 120^\circ$  и  $\gamma = 45^\circ$ . Какой угол он составляет с осью  $Oy$ ?

5. Радиус-вектор точки  $M$  составляет с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$  и с осью  $Oy$  – угол  $60^\circ$ . Длина его равна 6. Определите координаты точки  $M$ , если ее координата  $Z$  отрицательна.

6. По сторонам  $OA$  и  $OB$  прямоугольника  $OACB$  отложены единичные векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  с общим началом. Выразите через  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  векторы  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CB}$ ,  $\overline{BO}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{BA}$ , если длина  $OA = 3$  и  $OB = 4$ .

7. На плоскости  $Oxy$  построить векторы  $\overline{OA} = \vec{a} = 2\vec{i}$ ,  $\overline{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$  и  $\overline{OC} = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ . Разложите вектор  $\vec{c}$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

8. Проверьте коллинеарность векторов  $\overline{a} = \{2; -1; 3\}$  и  $\overline{b} = \{-6; 3; -9\}$ . Установите, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

### **Занятие 13. Векторная алгебра. Плоскость и прямая в пространстве.**

*Вопросы:*

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.

2. Уравнение плоскости.

*Ключевые понятия:* скалярное произведение, проекция вектора на вектор, условие ортогональности двух векторов, угол между двумя векторами, нормальный вектор плоскости, общее уравнение и неполные уравнения плоскости.

*Задания:*

1. Найдите скалярное произведение векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$ , зная, что  $|\overline{a}| = 3$ ,  $|\overline{b}| = 4$  и векторы образуют угол  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

2. Даны векторы  $\overline{a} = \{4; -2; -4\}$ ,  $\overline{b} = \{6; -3; 2\}$ . Вычислите:

а)  $\overline{a} \cdot \overline{b}$ ;

б)  $(2\overline{a} - 3\overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b})$ .

3. Даны векторы  $\overline{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\overline{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ . При каком значении  $m$  эти векторы перпендикулярны?

4. Определите угол между векторами  $\overline{a} = \{1; 2; 3\}$  и  $\overline{b} = \{6; 4; -2\}$ .

5. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\overline{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$  и  $\overline{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ .

6. Даны точки  $M_1(3; -1; 2)$  и  $M_2(4; -2; -1)$ . Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1$  перпендикулярно вектору  $\overline{M_1M_2}$ .

7. Найдите угол между плоскостями  $x - 2y + 2z - 8 = 0$  и  $x + z - 6 = 0$ .

8. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2; 2; -2)$  и параллельную плоскости  $x - 2y - 3z = 0$ .

9. Найдите расстояние точки  $(5; 1; -1)$  от плоскости  $x - 2y - 2z + 4 = 0$ .

#### Занятие 14. Плоскость и прямая в пространстве.

Вопросы:

1. Уравнения прямой.
2. Прямая и плоскость.

**Ключевые понятия:** канонические и параметрические уравнения прямой; направляющий вектор и направляющие коэффициенты прямой; условия параллельности, совпадения и пересечения прямой и плоскости.

Задания:

1. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2; 0; -3)$  параллельно: а) вектору  $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$ ; б) прямой  $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ .
2. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(1; -1; -3)$  параллельно: а) вектору  $\vec{a} = \{2; -3; 4\}$ ; б) прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$ .
3. Найдите точку пересечения прямой  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$  и плоскости  $2x + 3y + z - 1 = 0$ .
4. Докажите, что прямая  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$  параллельна плоскости  $2x + y - z = 0$ , а прямая  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$  лежит в этой плоскости.

#### Занятие 15. Предел и непрерывность функции.

Вопросы:

1. Функция. Область определения функции. Точки разрыва.
2. Раскрытие неопределённости вида  $(0/0)$ , заданной отношением многочленов.

**Ключевые понятия:** определение функции, основные элементарные и сложные функции, область определения сложной функции, точки разрыва 2-го рода, теорема о пределах арифметических действий над функциями, предел непрерывной функции, неопределённость вида  $(0/0)$ , критический множитель, правило раскрытия неопределённости вида  $(0/0)$ .

Задания:

1. Найдите область определения функций, заданных формулами:

а)  $y = \frac{3x-1}{5x+6}$ ;

б)  $y = \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ ;

в)  $y = \sqrt{2-3x} + \lg x$ ;

г)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ ;

д)  $y = \frac{1}{\log_5(1-3x)}$ .

2. Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$ .

#### Занятие 16. Предел и непрерывность функции.

Вопросы:

1. Раскрытие неопределённостей вида  $(0/0)$ , заданных иррациональными выражениями.
2. Раскрытие неопределённостей вида  $(\infty/\infty)$ , заданных отношением многочленов.



**Ключевые понятия:** разность квадратов двух чисел, выражение сопряжённое данному, критический множитель, теорема о пределе корня, главная часть многочлена, величина обратная бесконечно большой.

**Задания:**

1. Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ .

2. Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{2x^2+3x+4}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+5}{x^2+3}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ .

### Занятие 17. Предел и непрерывность функции.

**Вопросы:**

1. Раскрытие неопределённостей вида  $(\infty-\infty)$ .

**Ключевые понятия:** преобразование разности алгебраических функций к виду дроби, выделение критического множителя, раскрытие неопределённостей вида  $(0/0)$  и  $(\infty/\infty)$ , умножение и деление разности двух функций на сопряжённое выражение, односторонние пределы на бесконечности, извлечение квадратного корня из буквенного выражения, взаимная связь бесконечно малых и бесконечно больших величин.

**Задания:**

1. Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2}-x)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2}-x)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-\sqrt{x^2+x+1})$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-\sqrt{x^2+x+1})$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x})$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right)$ ;

з)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{3+x+x^2}}{x^2-3x+2} - \frac{\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2} \right)$ .

### Занятие 18. Предел и непрерывность функции.

**Вопросы:**

1. Первый замечательный предел.

**Ключевые понятия:** основные тригонометрические тождества, формулы синуса и косинуса двойного угла, формулы понижения чётной степени синуса и косинуса, формулы перехода к половинному углу.

**Задания:**

1. Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x)$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos x}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$ .

## Второй семестр

### Занятие 1. Производная и дифференциал.

### Вопросы:

1. Нахождение производных с помощью таблицы и правил дифференцирования основных элементарных функций.

**Ключевые понятия:** определение производной; таблица производных основных элементарных функций; правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения и частного двух функций.

### Задания:

1. Найдите производные функций:

1)  $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$ ;

2)  $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$ ;

3)  $y = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5\ln x - 7\cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ;

4)  $y = \log_2 x + 3\log_3 x$ ;

5)  $y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$ ;

6)  $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ ;

7)  $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arccotg} x$ ;

8)  $y = x^2 \operatorname{tg} x$ ;

9)  $y = \sqrt[3]{x} \ln x$ ;

10)  $y = x^2 \log_3 x$ ;

11)  $y = \frac{\ln x}{\sin x} + x \operatorname{ctg} x$ ;

12)  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ ;

13)  $y = \frac{x \operatorname{tg} x}{1 + x^2}$ .

2. Найдите значения производной функции:

а)  $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ , найти  $f'(0)$ ,  $f'(2)$ ,  $f'(-2)$ .

б)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , найти  $f'(e)$ ,  $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ ,  $f'(e^2)$ .

### Занятие 2. Производная и дифференциал.

#### Вопросы:

1. Производные сложных функций.

**Ключевые понятия:** суперпозиция двух функций, внешняя функция и внутренняя функция, правило дифференцирования сложной функции, формулы дифференцирования сложных функций, правило дифференцирования суммы и произведения двух функций.

#### Задания:

1. Найдите производные функций:

1)  $y = \sin(x^2 + 5x + 2)$ ;

2)  $y = \sqrt{1 + 5\cos x}$ ;

3)  $y = \sin^3 x$ ;

4)  $y = \ln \sin x$ ;

5)  $y = e^{\operatorname{tg} x}$ ;

6)  $y = \ln(x^2 - 3x + 7)$ ;

7)  $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}$ ;

8)  $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$ ;

9)  $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ ;

10)  $y = x \ln x + \arcsin \sqrt{x}$ ;

11)  $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2}$ .

### Занятие 3. Производная и дифференциал.

#### Вопросы:

1. Производные сложных функций.

**Ключевые понятия:** суперпозиция двух, трёх и более функций, правило дифференцирования сложной функции, формулы дифференцирования сложных и основных элементарных функций, правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций.

#### Задания:

1. Найдите производные функций:

1)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5})$ ;

3)  $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$ ;

5)  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ ;

7)  $y = e^{\frac{x}{3}} \cos \frac{x}{3}$ ;

9)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ;

11)  $y = \arcsin \sqrt{1-4x}$ ;

13)  $y = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}$ ;

15)  $y = x^2 \arcsin \sqrt{1-x^2}$ .

2)  $y = \ln \ln \sqrt{x}$ ;

4)  $y = \sin^2 x^3$ ;

6)  $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;

8)  $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$ ;

10)  $y = \log_7 \cos \sqrt{1+x}$ ;

12)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1}$ ;

14)  $y = \ln^5 \sin x$ ;

**Занятие 4. Производная и дифференциал.**

*Вопросы:*

1. Дифференциал функции.
2. Производные неявных функций.
3. Производные функций, заданных параметрическими уравнениями.

*Ключевые понятия:* определение дифференциала функции, формула дифференциала функции, правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции, понятие неявной функции, правило дифференцирования неявной функции.

*Задания:*

1. Найдите дифференциалы функций:

а)  $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$ ;

в)  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$ ;

б)  $y = \arcsin \sqrt{x}$ ;

г)  $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ .

2. Найдите производные неявных функций:

а)  $2x + y - 4 = 0$ ;

в)  $x \cos y - y \sin x = 0$ ;

д)  $xy - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$ ;

б)  $x \ln y + y \ln x = 0$ ;

г)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$ ;

е)  $\operatorname{arctg}(x+y) = x$ .

3. Найдите производные функций, заданных параметрическими уравнениями:

а)  $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t^3; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t); \end{cases}$

д)  $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \frac{t}{t+1}; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = a \sin^2 t; \end{cases}$

**Занятие 5. Производная и дифференциал.**

*Вопросы:*

1. Производные и дифференциалы высших порядков.

*Ключевые понятия:* производная и дифференциал второго и третьего порядков, приращение аргумента, приращение функции, предел отношения приращения функции к приращению аргумента, секущая, касательная, угловой коэффициент касательной, правило Лопиталя раскрытия неопределённостей.

*Задания:*

1. Найдите производные второго порядка от функций:

а)  $y = e^{-x^2}$ ;

в)  $y = \sqrt{1+x^2}$ ;

д)  $y = x \sin x$ ;

б)  $y = \cos^2 x$ ;

г)  $y = \ln(2x-3)$ ;

е)  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .

2. Найдите производные третьего порядка от функций:

а)  $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ ;

б)  $y = xe^{-x}$ ;

в)  $y = e^x \cos x$ ;

г)  $y = x^2 \sin x$ ;

д)  $y = x^3 \cdot 2^x$ ;

е)  $y = x \ln x$ .

3. Найдите производные  $n$ -го порядка от функций:

а)  $y = \ln x$ ;

б)  $y = \sin 3x$ ;

в)  $y = 3^x$ ;

г)  $y = e^{\frac{x}{2}}$ ;

д)  $y = x \cos x$ ;

е)  $y = x^3 e^x$ .

4. Найдите дифференциалы второго и третьего порядка от функций:

а)  $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$ ;

б)  $y = \cos 2x$ ;

в)  $y = 4^{-x^2}$ ;

г)  $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$ .

### Занятие 6. Исследование функций.

Вопросы:

1. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя.

**Ключевые понятия:** определения неопределённостей вида  $(0/0)$ ,  $(\infty/\infty)$ ,  $(0 \cdot \infty)$ ,  $(\infty - \infty)$ , правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида  $(0/0)$ ,  $(\infty/\infty)$ , преобразование разности функций к виду дроби, производные высших порядков, правила дифференцирования суммы и произведения функций.

Задания:

1. Найдите пределы по правилу Лопиталя:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$ ;

5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$ ;

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$ ;

7)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ;

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)$ ;

9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$ .

### Занятие 7. Исследование функций.

Вопросы:

1. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

**Ключевые понятия:** геометрический смысл производной в точке, уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом, условие перпендикулярности двух прямых, производная функции, заданной параметрически, теорема Вейерштрасса о свойстве функции, непрерывной на отрезке, необходимое условие экстремума функции.

Задания:



1. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе  $y = x^2$  в точке  $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

2. При каких значениях  $x$  касательные к графику функции  $y = x^3 - x$  параллельны прямой  $y = x$ ?

3. Составьте уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции, заданной параметрически, в точке  $(x_0; y_0)$ , соответствующей заданному значению параметра  $t = t_0$ :

а) 
$$\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке  $[a; b]$ :

а)  $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16; \quad x \in [1; 4]$

б)  $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}; \quad x \in [1; 4].$

### Занятие 8. Исследование функций.

*Вопросы:*

1. Исследование функций и построение графиков.

*Ключевые понятия:* область определения и точки разрыва функции, чётность и нечётность функции, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика, критические точки 1-го рода, интервалы монотонности, точки экстремума и экстремумы функции, критические точки 2-го рода, интервалы выпуклости и вогнутости графика, точки перегиба, точки пересечения графика с осями координат, построение графика функции по её полному исследованию.

*Задания:*

1. Выполните полное исследование и постройте графики функций:

а)  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2};$

б)  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$

### Занятие 9. Исследование функций.

*Вопросы:*

1. Исследование функций и построение графиков.

*Ключевые понятия:* область определения и точки разрыва функции, чётность и нечётность функции, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика, критические точки 1-го рода, интервалы монотонности, точки экстремума и экстремумы функции, критические точки 2-го рода, интервалы выпуклости и вогнутости графика, точки перегиба, точки пересечения графика с осями координат, построение графика функции по её полному исследованию.

*Задания:*

1. Выполните полное исследование и постройте графики функций:

а)  $y = \frac{2}{x^2 + 2x};$

б)  $y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}.$

### Занятие 10. Исследование функций.

*Вопросы:*

1. Исследование функций и построение графиков.

*Ключевые понятия:* область определения и точки разрыва функции, чётность и нечётность функции, вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика, критические точки 1-го рода, интервалы монотонности, точки экстремума и экстремумы функции, критические точки 2-го рода, интервалы выпуклости и вогнутости графика, точки перегиба, точки пересечения графика с осями координат, построение графика функции по её полному исследованию.

*Задания:*

1. Выполните полное исследование и постройте графики функций:

$$а) y = \frac{12x}{x^2 + 9};$$

$$б) y = \frac{4 - x^3}{x^2}.$$

### Занятие 11. Функции нескольких переменных.

*Вопросы:*

1. Нахождение области определения функции двух переменных.

*Ключевые понятия:* область определения функции, окрестность точки, внутренние и граничные точки области, замкнутая и незамкнутая область, ограниченная и неограниченная область.

*Задания:*

1. Найдите и изобразите область определения функций, заданных следующими формулами:

$$а) z = \frac{1}{x^2 + y^4};$$

$$б) z = \frac{1}{x^2 + y^3};$$

$$в) z = \sqrt[8]{1 - x^2 + y};$$

$$г) z = \sqrt[3]{1 - x^2 + y};$$

$$д) z = \ln(x + y);$$

$$е) z = \ln(x^2 + y^2);$$

$$ж) z = \arcsin x + \arccos x.$$

### Занятие 12. Функции нескольких переменных.

*Вопросы:*

1. Частные производные первого порядка.

*Ключевые понятия:* частные приращения и частные производные, физический смысл частных производных, таблица производных, правила дифференцирования, дифференцирование сложных функций.

*Задания:*

1. Найдите частные производные от функций:

$$а) z = x^3 + 3x^2y - y^3;$$

$$б) z = \frac{y}{x};$$

$$в) z = \frac{xy}{x - y};$$

$$г) z = \arctg \frac{y}{x};$$

$$д) z = xye^{x+2y};$$

$$е) z = e^{-\frac{y}{x}};$$

$$ж) z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}.$$

### Занятие 13. Функции нескольких переменных.

*Вопросы:*

1. Полный дифференциал функции двух переменных.

2. Производная по направлению. Градиент.

*Ключевые понятия:* формула полного приращения функции двух переменных, дифференцируемая функция, главная линейная часть полного приращения, частные дифференциалы, полный дифференциал, градиент функции, направляющие косинуса вектора, производная по направлению вектора.

*Задания:*

1. Найдите дифференциалы следующих функций:

$$а) z = \sin xy^2;$$

$$б) z = \operatorname{tg} \frac{x}{y};$$

$$в) z = xy \cos xy.$$

2. Найдите производную по направлению функции  $z = x^2 + y^2$  в точке  $M(1; 1)$ . Рассмотрите случаи, когда направление составляет с осью  $Ox$  угол: а)  $\frac{\pi}{3}$ ; б)  $\frac{\pi}{6}$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Найдите производную функции  $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2$  в точке  $M(2; 3; 1)$ . Рассмотрите случаи, когда направление совпадает: а) с направлением радиус-вектора этой точки; б) с направлением вектора  $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ .

4. Найдите  $\text{grad } z$ :

а)  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$  в точке  $M(0; 3)$ ;

б)  $z = e^{\frac{2x}{x^2+y}}$  в точке  $M(1; 1)$ .

5. Найдите  $\text{grad } u$  и  $|\text{grad } u|$ :  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  в точке  $M(-1; 2; 0)$ .

#### Занятие 14. Функции нескольких переменных.

*Вопросы:*

1. Частные производные высших порядков.

*Ключевые понятия:* частная производная от частной производной, смешанные частные производные второго порядка, частные производные высших порядков, независимость частных производных высших порядков от порядка дифференцирования.

*Задания:*

1. Найдите частные производные второго порядка:

а)  $z = \frac{x^2}{1-2y}$ ;

б)  $z = xe^y$ ;

в)  $z = \ln(x + e^{xy})$ .

2. Проверьте, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  для функции  $z = \arctg \frac{y}{x}$ .

3.  $z = e^x \cos y$ . Покажите, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

4. Найдите частные производные третьего порядка:

а)  $z = x^4 + 5y^3 + 3x - y$ ;

б)  $z = \sin(3x - 2y)$ ;

в)  $z = \frac{x}{y}$ ;

г)  $z = x^2 y^3$ .

5.  $u = xz + e^{yz} + y$ . Покажите, что  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$ .

#### Занятие 15. Функции нескольких переменных.

*Вопросы:*

1. Экстремум функции двух переменных.

*Ключевые понятия:* точки максимума и точки минимума функции, частные производные первого порядка, необходимые условия экстремума, стационарные точки, частные производные второго порядка, достаточные условия экстремума, локальный и глобальный экстремум.

*Задания:*

1. Найдите экстремумы функций:

а)  $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$ ;

б)  $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$ ;

в)  $z = x^3 - y^3 - 3xy$ ;

г)  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ .

#### Занятие 16. Неопределенный интеграл.

*Вопросы:*

1. Метод непосредственного интегрирования.

*Ключевые понятия:* первообразная, неопределённый интеграл, таблица основных интегралов, свойства неопределённого интеграла, действия со степенями и корнями, основные тригонометрические тождества, метод разложения дроби на сумму простейших дробей.

*Задания:*

1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислите интегралы:

$$1) \int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx;$$

$$3) \int e^x \left( 2 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx;$$

$$5) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx;$$

$$7) \int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx;$$

$$9) \int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

$$2) \int \left( x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$4) \int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$6) \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx;$$

$$8) \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx;$$

## Занятие 17. Неопределенный интеграл.

Вопросы:

1. Метод замены переменной в интегралах вида: 1)  $\int f(ax+b)dx$ , 2)  $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ , 3)  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ ,  $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ ,  $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^n} dx$ .

Ключевые понятия: подстановка: 1)  $t = ax + b$ , 2)  $t$  есть основание выделенного квадрата суммы или разности в знаменателе; 3)  $t = f(x)$ .

Задания:

1. Вычислите интегралы:

$$1) \int (2+5x)^9 dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$$

$$5) \int \frac{x^4}{x^5+7} dx;$$

$$7) \int \frac{2x-3}{x^2-4} dx;$$

$$9) \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx;$$

$$11) \int \frac{dx}{x(1+\ln x)^5};$$

$$2) \int \sqrt[3]{3-7x} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{3x^2-2x-1};$$

$$6) \int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x} dx;$$

$$8) \int \frac{x^6 dx}{x^{14}+5};$$

$$10) \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$12) \int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x} dx.$$

## Занятие 18. Неопределенный интеграл.

Вопросы:

1. Метод замены переменной в интегралах вида: 1)  $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$ .

Ключевые понятия: подстановка: 1)  $t = \varphi(x)$ .

Задания:

1. Вычислите интегралы:

$$1) \int e^{-x^2} x dx;$$

$$3) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$5) \int \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{3+5\sin 3x}} dx;$$

$$7) \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$9) \int \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^3} dx.$$

$$2) \int e^{\cos x} \sin x dx;$$

$$4) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$$

$$6) \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx;$$

$$8) \int \sqrt[4]{1-6x^5} x^4 dx;$$



## Занятие 19. Неопределенный интеграл.

Вопросы:

1. Метод интегрирования по частям.

Ключевые понятия: формула интегрирования по частям:  $\int u dv = uv - \int v du$ , три группы интегралов, решаемые по формуле интегрирования по частям.

Задания:

1. С помощью метода интегрирования по частям вычислите интегралы:

1)  $\int x e^{5x} dx$ ;

2)  $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$ ;

3)  $\int (x+1) \cos 3x dx$ ;

4)  $\int x^2 \sin x dx$ ;

5)  $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$ ;

6)  $\int \ln(x^2 + 2) dx$ ;

7)  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;

8)  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ ;

9)  $\int e^{2x} \cos 3x dx$ .

## Занятие 20. Неопределенный интеграл.

Вопросы:

1. Специальные приемы вычисления интегралов от тригонометрических функций вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ .

Ключевые понятия: интеграл  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  берется заменой переменной:

1)  $m$  – любое целое число,  $n$  – нечетное положительное число; подстановка  $t = \sin x$ ;

2)  $m$  – нечетное положительное число,  $n$  – любое целое число; подстановка  $t = \cos x$ ;

3)  $m, n$  – нечетные числа и хотя бы одно из них положительное; интеграл приводится к случаю 1) или 2);

4)  $m, n$  – четные положительные числа (в частности, одно из них может быть равным нулю). Предварительно нужно применить формулу понижения четной степени синуса и косинуса  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ,  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ,  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ . Далее интеграл преобразуется в сумму интегралов, рассмотренных в случаях 1)-3).

Задания:

1. Вычислите интегралы:

1)  $\int \sin^2 x \cos x dx$ ;

2)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ ;

3)  $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$ ;

4)  $\int \sin^5 x dx$ ;

5)  $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ ;

6)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$ ;

7)  $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$ ;

8)  $\int \cos^4 x dx$ .

## Занятие 21. Неопределенный интеграл.

Вопросы:

1. Специальные приемы вычисления интегралов от иррациональных функций вида  $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ .

Ключевые понятия: интеграл  $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$  берется заменой переменной  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

Задания:

1. Вычислите интегралы:

$$a) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx;$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}};$$

$$d) \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx;$$

$$б) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx;$$

$$г) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx;$$

$$e) \int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} dx.$$

## Занятие 22. Определенный интеграл.

*Вопросы:*

1. Вычисление определенного интеграла.

*Ключевые понятия:* формула Ньютона-Лейбница, вычисление определённого интеграла методом непосредственного интегрирования, методом замены переменной, методом интегрирования по частям, методом рационализации подынтегрального выражения.

*Задания:*

1. Вычислите интегралы:

$$1) \int_0^2 (3x^2 - 1) dx;$$

$$2) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$4) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

$$5) \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$6) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1};$$

$$7) \int_0^{\pi/4} tg^3 x dx;$$

$$8) \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx;$$

$$9) \int_1^e \ln x dx.$$

## Занятие 23. Определенный интеграл.

*Вопросы:*

1. Вычисление определенного интеграла.

*Ключевые понятия:* формула Ньютона-Лейбница, вычисление определённого интеграла методом непосредственного интегрирования, методом замены переменной, методом интегрирования по частям, методом рационализации подынтегрального выражения.

*Задания:*

1. Вычислите интегралы:

$$1) \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx;$$

$$2) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2};$$

$$3) \int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$$

$$4) \int_0^2 x(3-x) dx;$$

$$5) \int_0^{\pi} \sin 2x dx;$$

$$6) \int_1^e \ln^2 x dx;$$

$$7) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx;$$

$$8) \int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx;$$

$$9) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

## Занятие 24. Определенный интеграл.

*Вопросы:*

1. Вычисление несобственных интегралов 1-го рода.

**Ключевые понятия:** интеграл от непрерывной функции по бесконечному промежутку, интеграл с переменным верхним пределом, интеграл с переменным нижним пределом, сходящийся интеграл, расходящийся интеграл, обобщённые формулы Ньютона – Лейбница.

**Задания:**

1. Исследовать сходимость:

а)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ ;

б)  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ ;

в)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ ;

г)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$ ;

д)  $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ ;

е)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$ .

## **Занятие 25. Определенный интеграл.**

**Вопросы:**

1. Вычисление площади плоской фигуры.

**Ключевые понятия:** 1) площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , где  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a; b]$ :  $S = \int_a^b f(x) dx$ . 2) площадь плоской фигуры, ограниченной снизу и

сверху кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , где  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $x \in [a; b]$ :  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ .

**Задания:**

1. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

а)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ;

б)  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $y = 0$ ;

в)  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^2$ ;

г)  $y = \sin 2x$ ,  $y = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ , где  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ;

д)  $xy = 4$ ,  $x = 4$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

## **Занятие 26. Определенный интеграл.**

**Вопросы:**

1. Вычисление площади плоской фигуры.

**Ключевые понятия:** 1) площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , где  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a; b]$ :  $S = \int_a^b f(x) dx$ . 2) площадь плоской фигуры, ограниченной снизу и

сверху кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , где  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $x \in [a; b]$ :  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ .

**Задания:**

1. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

а)  $y^2 = 2px$ ,  $x = h$ ;

б)  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ;

в)  $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ;

г)  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x = 2$ ;

д)  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

## **Занятие 27-28. Дифференциальные уравнения первого порядка.**

**Вопросы:**

1. Решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.

**Ключевые понятия:** дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, дифференциальное уравнение первого порядка, область определения, решение, интегральная кривая дифференциального уравнения 1-го порядка, задача Коши и ее начальное условие, геометрический смысл задачи Коши, общее и частное решения дифференциального уравнения 1-го порядка, дифференциальное уравнение с разделенными и разделяющимися переменными, общий интеграл.

**Задания:**

1. Убедитесь, что функция  $y = (x + C)e^x$  является решением дифференциального уравнения  $y' - y = e^x$ .

2. Составьте дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых  $y = Cx^3$ .

3. Решите дифференциальное уравнение:

а)  $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$ ;

б)  $xy' = 1 - x^2$ .

4. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

а)  $ydx + ctgxdy = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ ;

б)  $2\sqrt{y}dx - dy = 0$ ,  $y(0) = 1$ .

5. Определите численность населения России через 20 лет, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население России в 2000 году составляло 145 млн. человек, а прирост населения за 2000 год был равен 2 %.

**Занятие 29-30. Дифференциальные уравнения первого порядка.**

**Вопросы:**

1. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли.

2. Уравнения Бернулли.

**Ключевые понятия:** линейное дифференциальное уравнение первого порядка, метод Бернулли, дифференциальное уравнение Бернулли, дифференциальное уравнение с разделенными и разделяющимися переменными, общее и частное решения, общий интеграл.

**Задания:**

1. Решите дифференциальное уравнение:

а)  $y' + y \lg x = \frac{1}{\cos x}$ ;

б)  $y' + \frac{x}{1-x^2}y = 2$ ;

в)  $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ .

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

а)  $s' - s \sin t = 2 \sin 2t$ ,  $s(0) = 1$ ;

б)  $\varphi r' + r - e^\varphi = 0$ ,  $r(\alpha) = 2\alpha$ ;

в)  $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$ ,  $y(1) = -1$ .

**Занятие 31-33. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.**

**Вопросы:**

1. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка, допускающие понижение порядка.

**Ключевые понятия:** дифференциальное уравнение 2-го порядка, область определения, решение, задача Коши и ее начальное условие, геометрический смысл задачи Коши, общее и частное решения дифференциального уравнения 2-го порядка, три вида дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка: 1)  $y'' = f(x)$  – повторное интегрирование обеих частей уравнения; 2)  $F(x; y'; y'') = 0$  (явно не содержит функции  $y$ ) – замена  $y' = p = p(x)$ ; 3)  $F(y; y'; y'') = 0$  (явно не содержит переменную  $x$ ) – замена  $y' = p = p(y)$ .

**Задания:**

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а)  $y'' = \sin 4x + 2x - 3$ ;

б)  $y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x$ ;

в)  $y'' = e^{5x} + \cos x - 2x^3$ ;

г)  $y'' = xe^{x^2} + 3^{-x}$ .

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а)  $y'' = (e^{2x} + \sin 3x)x$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ ;

б)  $y'' = (x^2 + 7x + 9)e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$ .

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:



а)  $y'' - y' \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ ;

б)  $y'' - \frac{2}{x} y' = 2x^3$ ;

в)  $(x+1)y'' = y' - 1$ ;

г)  $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$ .

4. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а)  $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 3$ ;

б)  $y''(1+\ln x) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln x$ ,  $y(1) = 0,5$ ,  $y'(1) = 1$ .

5. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а)  $y''y - (y')^2 - 1 = 0$ ;

б)  $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$ ;

в)  $y'' = y'(1 + (y')^2)$ ;

г)  $(1 + yy')y'' = (1 + (y')^2)y'$ .

6. Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а)  $y'' \operatorname{tg} x = 2(y')^2$ ,  $y(1) = \pi/4$ ,  $y'(1) = -2$ ;

б)  $y'' = y' \ln y'$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

### Занятие 34-36. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

*Вопросы:*

1. Решение линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

*Ключевые понятия:* линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, однородное и неоднородное уравнения; свойства однородных уравнений, линейно зависимые и независимые решения, определитель Вронского, характеристическое уравнение, действительные и комплексные корни характеристического уравнения, метод неопределенных коэффициентов, правая часть уравнения вида  $f(x) = e^{ax} P_n(x)$ , правая часть вида  $f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ .

*Задания:*

1. Установите, какие из следующих пар функций линейно независимы, а какие – линейно зависимы:

а)  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ;

б)  $\sin x$ ,  $\sin 2x$ ;

в)  $e^x$ ,  $e^{x^2}$ ;

г)  $\sin x \cos x$ ,  $\sin 2x$ .

2. Даны функции  $y_1 = e^x$  и  $y_2 = e^{-2x}$ . Составьте однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а)  $2y'' - 3y' + y = 0$ ;

б)  $4y'' + 4y' + y = 0$ ;

в)  $2y'' + y' + 3y = 0$ .

4. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

а)  $3y'' + 7y' + 4y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -\frac{2}{3}$ ;

б)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ;

в)  $4y'' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

5. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида:

а)  $y'' - 7y' = 5xe^x$ ;

б)  $y'' + 6y' + 9y = (x-2)e^{-3x}$ ;

в)  $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)\sin x + \cos x$ ;

г)  $y'' + 16y = 3x \sin 4x + \cos 4x$ .

6. Найдите частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а)  $y'' - 2y' - y = 6xe^x$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ ;

б)  $y'' + y = 4xe^x$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$ ;

в)  $y'' + y = 4 \sin x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ;

г)  $y'' + 2y' - 3y = 48x^2 e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -\frac{3}{2}$ .

#### **4. Методические указания для обучающихся по организации самостоятельной работы**

Самостоятельная работа обучающихся является важнейшим видом освоения содержания дисциплины, подготовки к практическим занятиям и экзамену. Самостоятельная работа развивает у обучающихся умение учиться, формирует способности к саморазвитию, творческому применению полученных знаний, способам адаптации к профессиональной деятельности в современном мире.

Организация самостоятельной работы обучающихся ориентируется на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей, переход от поточного к индивидуализированному обучению, с учетом потребностей и возможностей личности.

##### **4.1. Формы самостоятельной работы**

В ходе освоения дисциплины самостоятельная работа студентов организуется в трех взаимосвязанных формах:

- внеаудиторная самостоятельная работа;
- аудиторная самостоятельная работа под непосредственным руководством преподавателя;
- творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Видами внеаудиторной самостоятельной работы студентов являются:

- подготовка к лекциям, практическим (семинарским) занятиям;
- подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и других письменных работ на заданные темы;
- выполнение домашних заданий разнообразного характера;
- выполнение индивидуальных заданий, направленных на развитие у студентов самостоятельности и инициативы;
- подготовка к зачету и экзамену.

Аудиторная самостоятельная работа реализуется при проведении практических (семинарских) занятий и во время чтения лекций. При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории преподаватель контролирует усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам, тестового контроля знаний и т. д. На практических занятиях различные виды самостоятельной работы студентов позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе. При этом видами аудиторной самостоятельной работы студентов являются:

- написание конспектов;
- выполнение аудиторных индивидуальных заданий;
- самостоятельное решение задач и тестовых заданий;
- написание аудиторного эссе и др.

Видами творческой, в том числе научно-исследовательской работы студентов, являются:

- подготовка к участию в научно-теоретических конференциях, олимпиадах и пр.;
- написание научного доклада, статьи;
- подготовка презентации выступления и т.д.

Пакет заданий для самостоятельной работы выдается студентам в начале семестра, преподавателем определяются предельные сроки их выполнения и сдачи.

В процессе изучения курса необходимо обратить внимание на самоконтроль знаний. С этой целью студент после изучения каждой отдельной темы и затем всего курса по учебнику и дополнительной литературе должен проверить уровень своих знаний с помощью контрольных вопросов.

Для самостоятельного изучения отводятся вопросы, хорошо разработанные в учебных пособиях, научных монографиях и не могут представлять особенных трудностей при изучении.

Для эффективной организации самостоятельной работы обучающихся необходимо:

– последовательное усложнение и увеличение объема самостоятельной работы, переход от простых к более сложным формам (выступление при анализе кейса, подготовка презентации и реферата и т. д.);

– постоянное повышение творческого характера выполняемых работ, активное включение в них элементов научного исследования, усиления их самостоятельного характера;

– систематическое управление самостоятельной работой, осуществление продуманной системы контроля и помощи студентам на всех этапах обучения.

#### **4.2. Методические указания по выполнению контрольной работы и типового расчета**

В целях своевременного контроля лучшего усвоения дисциплины и интенсификации самостоятельных занятий студентам очной формы обучения выдаются задания по типовым расчетам. Типовой расчет содержит индивидуальные задания, выполняемые студентами самостоятельно с необходимыми пояснениями решения и указанием используемых теоретических понятий, определений, теорем и формул. Выполнение типового расчета контролируется преподавателем. Предварительно проверяется правильность решения задач. Завершающим этапом является защита типового расчета (возможна в двух вариантах: устном или письменном), во время которой студент должен уметь правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения своих задач и уметь решать задачи аналогичного типа.

В процессе изучения математики студент должен выполнить ряд контрольных работ. Рецензии преподавателя на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.

Рецензирование контрольных работ в системе заочного образования является одной из основных форм руководства самостоятельной работы студентов-заочников и средством контроля выполнения ими учебного плана и усвоения учебного материала в объеме, установленном программой.

В тех случаях, когда выявленные ошибки и недостатки в тексте выполненной контрольной работы настолько серьезны, что могут помешать дальнейшему изучению курса, контрольная работа возвращается студенту для полной или частичной ее переработки.

Повторно выполненная работа рецензируется только в том случае, если к ней приложена ранее не зачтенная работа. При повторном рецензировании работы преподаватель проверяет учтены ли при ее выполнении (исправлении) его указания. Если указания не учтены, то работа снова возвращается студенту для доработки.

Не следует приступать к выполнению контрольной работы или ее исправлению до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольной работы вызывается тем, что студент не выполнил именно это требование.

Если работа выполнена не в соответствии с номером варианта или преподаватель установит, что работа выполнена несамостоятельно, то она возвращается студенту без рецензирования. В этом случае в тетради преподаватель объясняет студенту причины возвращения и предлагает ему выполнить работу в соответствии с установленными правилами.

#### **4.3. Методические указания по написанию реферата**

Для написания реферата студент выбирает одну из тем, исходя из своих интересов к определенным вопросам курса, а также характера и перспектив практической работы. Выбранная тема согласовывается с преподавателем, при этом она может быть более конкретизирована применительно к практическим интересам магистранта. Конкретизация направлена на более глубокую проработку темы в практическом контексте. По объему работа должна составлять 15 – 20 страниц рукописного текста, не считая приложений, 14 шрифт (Times New Roman), полуторный интервал, список литературы не менее 20 источников.

Работа включает в себя: титульный лист, содержание, введение, основную часть, заключение, список литературных источников.



В ведении обосновывается актуальность излагаемой проблемы. Здесь дается краткое описание рассматриваемых в работе вопросов по основным разделам. Введение обычно составляет 1 страницу рукописного текста.

В теоретической части основное внимание уделяется критическому обзору литературных источников, раскрывается степень изученности исследуемой проблемы.

В аналитической части работы проводится всесторонний анализ факторов внешней среды, влияющих на проблемное поле, а также анализ внутренних сильных и слабых сторон. При выполнении этой части работы особое внимание необходимо обратить на системность анализа, логичность изложения материала.

Работа должна быть написана литературным языком, грамотно и аккуратно, снабжена научным аппаратом. Сокращения слов, кроме общеупотребительных, не допускаются. Все страницы должны быть пронумерованы.

#### **4.4. Методические указания по оформлению контрольной работы**

Распределение контрольных работ по семестрам сообщается студентам в начале каждого семестра. Контрольные работы выполняются студентами в отдельных тетрадях в клетку 18 листов. На титульном листе тетради студенты указывают название предмета, номер варианта, номер группы и свою фамилию, имя и отчество. Если тетрадь для контрольных работ заканчивается, то студент подписывает новую тетрадь, прикладывая к ней «старую». В контрольной работе задачи можно решать в удобном порядке, записывая их условия и указывая подробные решения. Работа над ошибками выполняется в конце контрольной работы, после рецензии преподавателя. Для каждой задачи, требующей исправлений или доработки, опять записывается условие и приводится подробное решение.

#### **4.5. Методические указания по подготовке научного доклада**

Научный доклад представляет собой исследование по конкретной проблеме, изложенное перед аудиторией слушателей. Это может быть выступление на семинарском занятии, конференции научного студенческого общества («Неделе науки») или в рамках проводимых круглых столов. В любом случае успешное выступление во многом зависит от правильной организации самого процесса подготовки научного доклада.

Работа по подготовке научного доклада включает не только знакомство с литературой по избранной тематике, но и самостоятельное изучение определенных вопросов. Она требует умения провести анализ, способности наглядно представить итоги проделанной работы, и что очень важно — заинтересовать аудиторию результатами своего исследования. Следовательно, подготовка научного доклада требует определенных навыков.

Подготовка научного доклада включает несколько этапов работы:

##### *1. Выбор темы научного доклада*

Подготовка к научному докладу начинается с выбора темы будущего выступления. Практика показывает, что правильно выбрать тему — это значит наполовину обеспечить успешное выступление. Конечно же, определяющую роль в этом вопросе играют интересы, увлечения и личные склонности студента, непосредственная связь темы доклада с будущей или настоящей практической работой (если это студенты вечернего отделения). Определенную помощь при избрании темы может оказать руководитель научного кружка, преподаватель, ведущий семинарское занятие или читающий лекционный курс. И все-таки при выборе темы и ее формулировке необходимо учитывать следующие требования:

1. Тема выступления должна соответствовать Вашим познаниям и интересам. Здесь очень важен внутренний психологический настрой.

2. Не следует выбирать слишком широкую тему научного доклада. Это связано с ограниченностью докладчика во времени. Доклад должен быть рассчитан на 10 – 15 минут. За такой промежуток времени докладчик способен достаточно полно и глубоко рассмотреть не более одного – двух вопросов.

3. Научный доклад должен вызвать интерес у слушателей. Он может содержать какую-либо новую для них информацию или изложение спорных точек зрения различных авторов по освещаемой проблеме.



Студент, приступающий к подготовке научного доклада, должен четко определить ЦЕЛЬ будущего выступления.

Понятно, что до изучения литературы по выбранной теме довольно сложно сформулировать конкретную цель своего исследования. В этом случае необходимо обозначить общую цель или целевую установку. Конкретная целевая установка дает направление, в котором будет работать докладчик, помогает осознано и целенаправленно подбирать необходимый материал.

## *II. Подбор материалов*

Работа по подбору материалов для доклада связана с изучением литературы.

Изучение литературы по выбранной теме желательно начинать с просмотра нескольких учебников. Это позволит получить общее представление о вопросах исследования. Дальнейший поиск необходимой информации предполагает знакомство с тремя группами источников. Первая группа включает монографии, научные сборники, справочники. Ко второй группе относятся материалы периодической печати – журнальные и газетные статьи. К третьей ресурсы Интернет. Материалы официального характера из Интернет должны браться только из официальных сайтов (информация на других сайтах может быть устаревшей). Прямой перенос в работу текстовых фрагментов из Интернет (кроме коротких цитат классических работ по теме) запрещен. Именно в двух последних группах в основном содержатся новые сведения и факты, приводятся последние цифровые данные.

## *III. Составление плана доклада*

После того, как работа по подбору источников завершена и имеется определенное представление об избранной теме, можно составить предварительный план. При этом необходимо учесть, что предварительно составленный план будет и меняться и корректироваться в процессе дальнейшего изучения темы.

Работу над текстом будущего выступления можно отнести к наиболее сложному и ответственному этапу подготовки научного доклада. Именно на этом этапе необходимо произвести анализ и оценку собранного материала, сформулировать окончательный план.

Приступая к работе над текстом доклада, следует учитывать структуру его построения. Научный доклад должен включать три основные части: вступление, основную часть, заключение.

Вступление представляет собой краткое знакомство слушателей с обсуждаемой в докладе проблемой. Действительно, хотя вступление непродолжительно по времени (всего 2 – 3 минуты), оно необходимо, чтобы пробудить интерес в аудитории и подготовить почву для доклада. Необходимо начать с главной мысли, которая затем займет центральное место. Удачно сформулированные во вступлении несколько фраз способны обеспечить успех всего доклада.

Основная часть является логическим продолжением вопросов, обозначенных автором во введении. Именно в этой части доклада предстоит раскрыть тему выступления, привести необходимые доказательства (аргументы). Для того чтобы правильно построить основную часть своего доклада, необходимо составить ее подробный план. Важность составления такого плана связана с основной задачей автора. Он должен в течение 10 минут, отведенных на основную часть, суметь представить и изложить авторскую точку зрения по обозначенной в теме доклада проблеме. Наличие подробного плана позволяет выполнить эту задачу, дает возможность автору в сжатой форме донести свои идеи до аудитории и уложиться в установленный регламент.

Заключение имеет целью обобщить основные мысли и идеи выступления. Его, как и весь доклад, необходимо подготовить заранее. В заключении можно кратко повторить основные выводы и утверждения, прозвучавшие в основной части доклада. На заключение можно возложить также функцию обобщения всего представленного докладчиком материала.

## *IV. Оформление материалов выступления*

Подготовленный доклад и будущее выступление в аудитории направлено на его слуховое восприятие. Устная речь предоставляет оратору дополнительные средства воздействия на слушателей: голос, интонация, мимика, жесты. Однако одновременно следует успешно использовать способность слушателей ВИДЕТЬ.

Автор научного доклада может прекрасно дополнить свое выступление, используя диаграммы, иллюстрации, графики, изображения в презентации.

Но, чтобы использование наглядных пособий произвело предполагаемый эффект, необходимо учитывать следующие правила:

1. целесообразно использовать наглядный материал. Если же необходимость в его демонстрации отсутствует, применение будет только отвлекать внимание слушателей;
2. презентация готовится заранее;
2. изображения, представленные в презентации, должны быть видны всем. Сложным статистическим таблицам следует придать доступную форму диаграмм или графиков;
3. наглядные материалы необходимо демонстрировать аудитории, а не самому себе;
4. тезисы доклада должны быть тесно связаны с изображением наглядных материалов;
5. чтобы не отвлекать внимание аудитории, нужно своевременно переходить к демонстрации других материалов;
6. необходимо делать паузу в выступлении, если аудитория занята рассматриванием наглядных материалов.

#### *V. Подготовка к выступлению*

Подготовив материал для доклада, следует решить вопрос о записях к выступлению: готовить полный текст доклада, составить подробные тезисы выступления или приготовить краткие рабочие записи. Научный доклад представляет собой устное произведение, чтение вслух подготовленного текста недопустимо.

#### **4.6. Методические указания по подготовке научной статьи**

Научная статья – это представление результатов исследования для научной общественности. Научная статья обязательно включает элементы нового знания, которые и определяют её значимость. В отдельных случаях научная статья может содержать систематизацию, обобщение уже известных научных данных о процессе, явлении или объекте, на основе которого делаются новые выводы, прогнозы. Такая статья называется обзором научной литературы по определенной проблеме.

Выбор темы исследования неразрывно связан с выбором его объекта. Объект исследования – система, процесс или явление, порождающие проблемную ситуацию и избранные для изучения. Получение знаний об объекте, необходимых для решения конкретной проблемы, поставленной в исследовании, осуществляется посредством изучения результатов целенаправленного научного воздействия на отдельные части объекта, называемые предметами исследования.

Предмет исследования – часть, сторона, свойство, отношение объекта, исследуемые с определенной целью в данных условиях, т.е. это элемент объекта исследования. Предмет исследования является носителем группы или ряда существенных свойств, связей, или признаков изучаемого объекта и служит средством его научного познания.

После обоснования темы, определения объекта и предмета исследования формулируется цель исследования по данной теме. Цель исследования выступает как определенный механизм интеграции различных действий в систему «цель – средство – результат». Цель – заранее осознанный и планируемый результат. Основные элементы, формирующие содержание цели исследования: конечный результат, объект исследования, путь достижения конечного результата.

Задачами исследования называются вопросы, получение ответов на которые необходимо для достижения цели исследования. Как правило, выдвигаются следующие исследовательские задачи:

- выявление сущности, признаков, критериев изучаемого процесса, явления и на этой основе его объяснение, характеристика;
- обоснование основных путей (методов, средств) решения проблемы.

Изучение научной литературы – это важный и длительный процесс, завершающийся написанием окончательного варианта статьи. Он включает ряд этапов: поиск источников; ознакомительное чтение; углубленное, изучающее чтение с выписками в форме конспектов, аннотаций, тезисов, реферирования; использование источников в процессе исследования для объяснения и интерпретации собственных результатов и наблюдений; ссылки на литературу в черновике; написание обзорной части работы; организация библиографического описания к работе и его окончательное редактирование.

Научное обобщение носит особый характер, оно отличается точностью, подчеркнутой логичностью, однозначным выражением мысли, которая строго аргументируется, а ход логических рассуждений акцентируется с помощью специальных средств связи.

Перечислим некоторые языковые средства научного стиля, чтобы вы могли придерживаться их при работе с рукописью:

- слова обобщенной семантики (важность, системность, возрастание, понижение, применение и т.п.);
- термины, характерные для какой-либо науки, и общенаучные понятия (закон, принцип, классификация, информация, вероятность, гипотеза и др.);
- слова, указывающие на закономерный характер описанных явлений (обычно, обыкновенно, всегда, регулярно, всякий, каждый, как правило и т. п.);
- глаголы настоящего вневременного в обобщенно-отвлеченных значениях (речь ИДЕТ о проблеме..., отсюда СЛЕДУЕТ вывод..., СЛЕДУЕТ заметить, что ..., вычисление (наблюдение) ПРИВОДИТ к следующему результату ..., перейдем к следующему вопросу ..., заключение носит предварительный характер..., из сказанного ранее вытекает..., это дает основание говорить о ..., это говорит о ... и др.);
- глаголы прошедшего и будущего времени используются в значении настоящего времени (мы получим / получили ..., применим ..., используется, выражается, наблюдается и т. п.); чаще используются глаголы несовершенного вида, как более отвлеченно-обобщенные; глаголы же совершенного вида характерны для устойчивых оборотов (докажем, что ..., рассмотрим ..., выведем ...);
- преобладают формы 3-го лица местоимений и глаголов. Авторское «Мы плюс личная форма глагола» употребляется в отвлеченно-обобщенном значении (мы считаем (полагаем, утверждаем..., нами установлено...).
- частотны существительные единственного числа, формы среднего рода у существительных абстрактного значения (движение, количество);
- краткие прилагательные: Пространство однородно и изотропно.

На синтаксическом уровне связь между предложениями осуществляется с помощью повторяющихся существительных и местоимений. Следите, чтобы в близком контексте не повторялись слова ЭТОТ, ЭТО, заменяйте их синонимами. Например, этот → подобный, такой же, указанный выше, данный и т. п. В предложении преобладает прямой порядок слов (подлежащее – сказуемое – дополнения).

После подготовки черновых набросков отдельных разделов необходимо приступить к написанию рукописи статьи в целом. Разделы следует расположить в следующем порядке:

- аннотация;
- введение;
- экспериментальный раздел;
- аналитический/теоретический раздел;
- заключение;
- список использованных источников.



Некоторые из перечисленных выше разделов в конкретной работе могут отсутствовать, а порядок следования разделов может быть иной, что необходимо согласовать с научным руководителем.

Введение может включать следующие компоненты: обоснование и актуальность темы; краткий обзор литературы, характеристика предмета, объекта (объектов), а также методов исследования; выдвигаемая гипотеза; научная новизна работы, ее теоретическая и практическая значимость.

В экспериментальном (исследовательском) разделе дается обоснование и описание методики исследования; приводятся полученные данные, размещается необходимый иллюстративный материал; формулируются выводы и обобщения.

В тексте статьи следует аргументировано выделить то новое и оригинальное, что вносит в разработку проблемы автор статьи. Текст должен обладать некоторым композиционно-сюжетным построением, направленным на последовательное и целенаправленное раскрытие для читателя процесса авторского поиска.

Аналитический или теоретический раздел посвящается анализу полученных экспериментальных результатов; их описанию, интерпретации в рамках существующей теории или представляет оригинальное теоретическое исследование.

Методический раздел может содержать аргументированные практические рекомендации, возможности и особенности использования результатов работы.

Заключение в краткой форме подводит итоги всей работы в виде тезисов или выводов, согласованных с целью и задачами исследования; указывает теоретическую и практическую ценность полученных результатов, их возможное внедрения, намечает дальнейшие перспективы изучения данной проблемы.

#### **4.7. Методические указания по подготовке презентации**

Презентация – это краткое наглядное изложение информации по содержанию работы, представленное посредством программы MS PowerPoint.

Презентация содержит основные положения, выносимые на защиту, графический материал – рисунки, таблицы, алгоритмы и т. п., которые иллюстрируют предмет исследования.

Презентация работы служит для убедительности и наглядности материала, выносимого на защиту, и должна включать в себя следующие разделы:

- титульный лист презентации (1 слайд);
- цель исследования, объект и предмет исследования (1 слайд);
- алгоритм и методика исследования (1 – 2 слайда);
- полученные результаты исследования (2 – 3 слайда);
- основные выводы и предложения (2 – 3 слайда).

Общая структура представленной презентации должна соответствовать структуре доклада.

При создании презентации следует придерживаться следующих рекомендаций:

- шрифт – Times New Roman;
- размер шрифта для заголовков – не менее 32;
- размер шрифта для текста – не менее 28;
- цвет и размер шрифта, форматы рисунков и таблиц должны быть подобраны так, чтобы все надписи, рисунки и таблицы отчетливо просматривались на слайде.

#### **5. Методические указания для обучающихся по организации и проведению обучения в интерактивных формах**

I. Лекция-беседа - диалогический метод изложения и усвоения учебного материала. Лекция-беседа позволяет с помощью системы вопросов, умелой их постановки и искусного поддержания диалога воздействовать как на сознание, так и на подсознание обучающихся, научить их самокоррекции. Проведение лекции-беседы предполагает наличие определенного объема знаний об изучаемом материале и связи с ним. Лекция-беседа помогает побудить обучающихся к актуализации имеющихся знаний, вовлечь их в процесс самостоятельных размышлений, в эвристический, творческий процесс получения новых знаний; способствует



активизации познавательной деятельности, вовлекает в максимальный мыслительный поиск, с целью разрешения противоречий, подводит к самостоятельному формированию выводов и обобщений, создает условия для оперативного управления процессом познания.

По назначению в учебном процессе выделяют следующие виды лекции-беседы:

- вводные или вступительные (организующие);
- сообщения новых знаний;
- закрепляющие.

Вводная лекция-беседа проводится в начале лекционного занятия. С ее помощью обеспечивается психологическая настройка обучающихся на восприятие и усвоение нового материала. Беседа способствует пониманию значения предстоящей работы, формирует представления о ее содержании, специфике и особенностях.

Сообщения новых знаний. Строится в форме вопросов и ответов преимущественно при анализе прочитанных текстов, запоминании ответов (катехизическая); способствует подведению обучающихся за счет умело поставленных вопросов, имеющихся знаний и жизненного опыта, к усвоению новых знаний, формулированию понятий, решению задач; создает субъективное впечатление, что обучающийся сам сделал открытие, проделал путь от практики к научной истине.

Закрепляющие лекции-беседы применяются для закрепления, обобщения и систематизации знаний.

Эффективность беседы зависит от тщательной подготовки преподавателя, продуманности и профессиональной формулировки вопросов в четкой постановке, их логической последовательности. Вопросы должны развивать все виды мышления, обеспечивать логическую форму мышления (весь спектр мыслительных действий), соответствовать уровню развития обучающихся; со стороны обучающихся ответы должны быть осознанными и аргументированными, полными, точными, ясными, правильно сформулированными.

Цель: путем постановки тщательно продуманной системы вопросов по заданной теме достижение понимания обучающимися нового материала или проверка усвоения ими уже изученного материала.

Задачи:

- изучение вопросов по заданной теме или закрепление изученного материала;
- развитие умений обучающихся структурировать и систематизировать материал, сопоставлять различные источники, обобщать материал, делать выводы;
- развитие навыков обучающихся по выработке собственной позиции по изучаемым проблемам.

Методика проведения лекции-беседы:

- назначение секретаря лекции-беседы, его инструктаж по выполняемым функциям;
- объявление критерий оценки;
- проведение беседы по заранее подготовленным преподавателем вопросам;
- подведение итогов беседы и оценка участников беседы по материалам, переход к информационной лекции.

II. Интерактивное решение задач – это метод, при котором при решении задач принимают участие все обучающиеся под руководством преподавателя-модератора. В результате получается углубленное познание обучающимися методики решения типовых профессиональных задач. В процессе интерактивного решения задачи обучающимся дается возможность предположить последующий алгоритм и результат ее решения. Применение на практике обучения метода интерактивного решения задач позволяет развивать у обучающихся способность прогнозирования и планирования решения профессиональных задач.

Цель: проверка навыков решения профессиональных задач и развитие мыслительных операций обучающихся, направленных на достижение результатов при решении профессиональных задач.

Задачи:

- проверка навыков применения обучающимися ранее усвоенных знаний при реше-

нии профессиональных задач;

- формирование навыков совместной деятельности подчиненных (обучающихся) и руководителя (преподавателя);
- овладение обучающимися знаниями и общими принципами решения проблемных профессиональных задач;
- развитие навыков активной интеллектуальной деятельности;
- развитие коммуникативных навыков (навыков общения);
- развитие навыков обучающихся по выработке собственной позиции по ходу решения профессиональных задач.

Методика проведения:

1. Первый этап «подготовка проекта решения задач». Преподавателем разрабатывается проект хода решения задачи с началом или фрагментами решения.

2. Второй этап «организационный»:

- объявление темы и цели решения задачи;
- объявление критериев оценки.

3. Третий этап «интеллектуальный»:

- объявление условий решения задач;
- индивидуальное решение задачи обучающимися, исходя из собственного мнения;
- высказывание обучающимися мнений по ходу решения задач;
- обсуждение результатов и методики индивидуального решения задач обучающимися и принятие плана верного хода решения;

4. Четвертый этап «подведение итогов решения задачи»:

- формулирование вывода решения задачи обучающимися;
- подведение итога интерактивного решения задачи преподавателем;
- оценка преподавателем обучающихся по материалам, подготовленным секретарем.

III. Работа в малых группах - это одна из самых популярных стратегий, так как она дает всем обучающимся (в том числе и стеснительным) возможность участвовать в работе, практиковать навыки сотрудничества, межличностного общения (в частности, умение активно слушать, вырабатывать общее мнение, разрешать возникающие разногласия). Все это часто бывает невозможно в большом коллективе. При организации групповой работы, следует обращать внимание на следующие ее аспекты. Нужно убедиться, что обучающиеся обладают знаниями и умениями, необходимыми для выполнения группового задания. Нехватка знаний очень скоро даст о себе знать - обучающиеся не станут прилагать усилий для выполнения задания. Надо стараться сделать свои инструкции максимально четкими. Надо предоставлять группе достаточно времени на выполнение задания.

При работе в малой группе обучающиеся могут выполнять следующие роли:

- фасилитатор (посредник-организатор деятельности группы);
- регистратор (записывает результаты работы);
- докладчик (докладывает результаты работы группы);
- журналист (задает уточняющие вопросы, которые помогают группе лучше выполнить задание, например те вопросы, которая могла бы задать другая сторона в дискуссии);
- активный слушатель (старается пересказать своими словами то, о чем только что говорил кто-либо из членов группы, помогая сформулировать мысль);
- наблюдатель (должен отмечать признаки определенного поведения, заранее описанного преподавателем, и определять, как члены группы справляются с возникающими по ходу работы проблемами. Отчитываясь перед группой, наблюдатели обязаны представлять свои заметки в максимально описательной и объективной форме);
- хронометрист (следит за временем, отпущенным на выполнение задания) и другие.

Цель: проверка уровня освоения ранее изученного материала и формирование навыков работы в малых группах.

Задачи:

- активизация познавательной деятельности обучающихся;

- развитие навыков самостоятельной профессиональной деятельности: определение ведущих и промежуточных задач, выбор оптимального пути, умение предусматривать последствия своего выбора, объективно оценивать его;
- развитие умений успешного общения (умение слушать и слышать друг друга, выстраивать диалог, задавать вопросы на понимание и т. д.);
- совершенствование межличностных отношений в коллективе.

Методика проведения:

1. Первый этап «Подготовка задания для работы в малых группах». Задания для работы в малых группах разрабатываются либо преподавателем, либо преподавателем совместно с обучающимися.

2. Второй этап «Организационный»:

- объявление темы и цели работы в малых группах;
- объяснение задания для работы в малых группах;
- объявление критериев оценки;
- деление обучающихся на группы;
- назначение ролей в группах.

3. Третий этап «Выполнение задания в группе»:

- высказывание обучающимися мнений по выполнению задания;
  - обсуждение результатов и методики выполнения задания обучающимися и принятие плана хода выполнения задания;
  - написание протокола малой группы по планированию деятельности при выполнении задания. Протокол должен содержать цель, задачи, методы, назначение ролей и норму времени выполнения задания;
  - выполнение задания;
  - подготовка отчета по проведенной работе. Отчет должен содержать описание цели, задач, методики выполнения задания, результаты, доказательства и выводы по выполненному заданию, ответственных по ролям и описание выполненных ими функций;
4. Четвертый этап «Подведение итогов работы в малых группах»:
- выступление докладчика с отчетом по работе в малых группах. При докладе отчета можно использовать мультимедийные презентации;
  - оценка преподавателем обучающихся.

Деление обучающихся на группы – это важный момент в организации работы в малых группах. Способов деления обучающихся на группы существует множество, и они в значительной степени определяют то, как будет протекать дальнейшая работа в группе, и на какой результат эта группа выйдет.

Способы деления обучающихся на группы:

1. По желанию.

Объединение в группы происходит по взаимному выбору. Задание на формирование группы по желанию может даваться, как минимум, в двух вариантах:

- разделитесь на группы по ... человек.
- разделитесь на ... равные группы.

2. Случайным образом.

Группа, формируемая по признаку случайности, характеризуется тем, что в ней могут объединяться (правда, не по взаимному желанию, а волей случая) обучающиеся, которые в иных условиях никак не взаимодействуют между собой либо даже враждуют. Работа в такой группе развивает у участников способность приспосабливаться к различным условиям деятельности и к разным деловым партнерам.

Этот метод формирования групп полезен в тех случаях, когда перед преподавателем стоит задача научить обучающихся сотрудничеству. В этом случае преподаватель должен обладать достаточной компетентностью в работе с межличностными конфликтами.

Способы формирования «случайной» группы: жребий; объединение тех, кто сидит рядом (в одном ряду, в одной половине аудитории); с помощью импровизированных «фан-



тов» (один из обучающихся с закрытыми глазами называет номер группы, куда отправится обучающийся, на которого указывает в данный момент преподаватель) и т.п.

### 3. По определенному признаку.

Такой признак задается либо преподавателем, либо любым обучающимся. Так, можно разделить по первой букве имени (гласная – согласная), в соответствии с тем, в какое время года родился (на четыре группы), по цвету глаз (карие, серо-голубые, зеленые) и так далее.

Этот способ деления интересен тем, что, с одной стороны, может объединить обучающихся, которые либо редко взаимодействуют друг с другом, либо вообще испытывают эмоциональную неприязнь, а с другой – изначально задает некоторый общий признак, который сближает объединившихся. Есть нечто, что их роднит и одновременно отделяет от других. Это создает основу для эмоционального принятия друг друга в группе и некоторого отдаления от других (по сути дела – конкуренции).

### 4. По выбору «лидера».

«Лидер» в данном случае может либо назначаться преподавателем (в соответствии с целью, поэтому в качестве лидера может выступать любой обучающийся), либо выбираться обучающимися. Формирование групп осуществляется самими «лидерами». Например, они по очереди называют имена тех, кого они хотели бы взять в свою группу. Наблюдения показывают, что в первую очередь «лидеры» выбирают тех, кто действительно способен работать и достигать результата. Иногда даже дружба и личные симпатии отходят на второй план.

В том случае если в аудитории есть явные аутсайдеры, для которых ситуация набора в команду может быть чрезвычайно болезненной, лучше или не применять этот способ, или сделать их «лидерами».

### 5. По выбору преподавателя.

В этом случае преподаватель создает группы по некоторому важному для него признаку, решая тем самым определенные педагогические задачи. Он может объединить обучающихся с близкими интеллектуальными возможностями, со схожим темпом работы, а может, напротив, создать равные по силе команды. При этом организатор групповой работы может объяснить принцип объединения, а может уйти от ответа на вопросы участников по этому поводу.