Приложение 2 к рабочей программе дисциплины
«Математика»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛЖСКИЙ ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ, ПЕДАГОГИКИ И ПРАВА»

Факультет экономики и управления

Фонд оценочных средств
по дисциплине
«Математика»

Специальность:
38.05.01 Экономическая безопасность

Специализация образовательной программы:
Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

Уровень высшего образования:
специалитет

Квалификация выпускника:
«экономист»

Оглавление

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы, описание показателей, критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Перечень компетенций	Показатели оценивания компетенций	Критерии оценивания компетенций	Этапы формирования компетенций	Шкала оценивания
ОПК-1. Способен использовать знания и методы экономической науки, применять статистико-математический инструментарий, строить экономико-математические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализировать и интерпретировать полученные результаты	– знает математическую символику, понятия и утверждения линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; – умеет решать методами дифференциального и интегрального исчисления экономические задачи; – владеет методами дифференциального и интегрального исчисления для решения экономических задач	– знает отдельные математические символы, понятия и утверждения линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; – умеет при помощи преподавателя решать методами линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления экономические задачи; – владеет по инструкции преподавателя методами линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления для решения экономических задач	Начальный	удовлетворительно (61 – 75 баллов)
		– знает основные математические символы, понятия и утверждения линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; – умеет самостоятельно решать методами линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления типовые экономические задачи; – владеет методами линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления для решения типовых экономических задач	Основной	хорошо (76 – 90 баллов)

Перечень компетенций	Показатели оценивания компетенций	Критерии оценивания компетенций	Этапы формирования компетенций	Шкала оценивания
		– знает математическую символику, понятия и утверждения линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; – умеет решать методами линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления экономические задачи; – владеет методами линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления для решения экономических задач	Завершающий	отлично (91 – 100 баллов)

2. Методические материалы и типовые контрольные задания, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

2.1. Типовые контрольные задания, используемые для проведения входного контроля

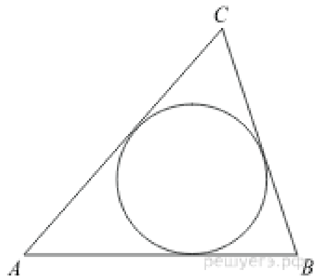
1. В школе французский язык изучают 124 учащихся, что составляет 25 % от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?

2. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 2), (8; 10), (8; 8).

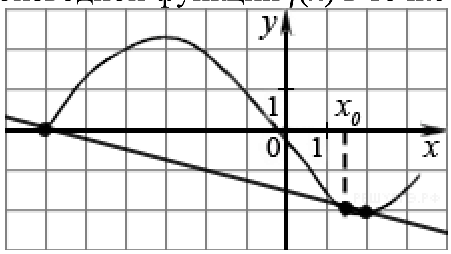
3. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов – первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

4. Найдите корень уравнения $\log_5(4+x)=2$.

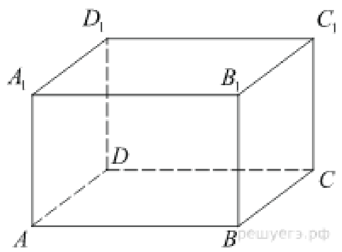
5. Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



7. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, B_1, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 5$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.



8. Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{15-4x}}=0{,}2$.

9. Плоский замкнутый контур площадью $S = 0{,}5$ м^2 находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS\cos\alpha$, где α – острый угол между направлением магнитного поля и

перпендикуляром к контуру, $a = 4 \cdot 10^{-4}$ Тл/с – постоянная, S – площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м^2). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать 10^{-4} В?

10. Плиточник должен уложить 175 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 10 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

11. Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 7\operatorname{tg} x - 3{,}5\pi + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

12. Найдите $\dfrac{10\cos\alpha + 4\sin\alpha + 15}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}5$.

2.2 Типовые контрольные задания, используемые для промежуточной аттестации по дисциплине

2.2.1. Примерный перечень вопросов к экзамену

1 курс, 1 семестр

1. Декартовы координаты точки на прямой и на плоскости.
2. Задача о вычислении расстояния между двумя точками на плоскости. Задача о делении отрезка в данном отношении. Формулы деления отрезка пополам.
3. Линия как геометрическое место точек плоскости. Определение уравнения с двумя переменными и уравнения линии. Понятие текущих координат точки и параметрических уравнений линии. Два типа задач аналитической геометрии.
4. Определение углового коэффициента прямой. Вывод уравнения прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Уравнение пучка прямых с центром в данной точке. Формула углового коэффициента отрезка. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Понятие общего уравнения прямой.
6. Определение угла между двумя прямыми на плоскости. Вывод формулы тангенса этого угла. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
7. Вычисление расстояния от точки до прямой на плоскости.
8. Общее уравнение линий второго порядка. Определение окружности и вывод её канонического уравнения. Преобразование общего уравнения линии второго порядка к каноническому уравнению окружности.
9. Определение параболы и вывод её канонического уравнения. Свойства параболы, её график и уравнение при различных осях симметрии.
10. Определение эллипса и вывод его канонического уравнения.
11. Свойства эллипса: эллипс как сжатая окружность; вершины и оси эллипса; фокусное расстояние, эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса.
12. Определение гиперболы. Каноническое уравнение (без вывода) и свойства гиперболы: ветви; основной прямоугольник, асимптоты, вершины, оси и форма гиперболы; фокусное расстояние, эксцентриситет и фокальные радиусы.
13. Скалярные и векторные величины. Определение вектора и его длины. Определение коллинеарных и равных векторов. Понятие свободного вектора.
14. Определение и геометрическое изображение линейных операций над векторами. Свойства линейных операций и их назначение.
15. Прямоугольная декартова система координат в пространстве. Декартовы координаты точки. Радиус-вектор точки, его разложение по базису и координаты.
16. Разложение по базису вектора, проходящего через две заданные точки. Декартовы координаты вектора. Запись линейных операций, условий равенства и коллинеарности двух векторов в координатной форме.

17. Определение скалярного произведения и его следствия: длина вектора; формула косинуса угла между двумя векторами и условие их перпендикулярности; направляющие косинусы вектора.
18. Вывод уравнения плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору. Общее уравнение плоскости. Вывод формулы расстояния от точки до плоскости.
19. Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.
20. Определение и основные свойства функции.
21. Основные способы задания функций. Простейшие, сложные и элементарные функции.
22. Предел переменной. Окрестность точки. Конечный и бесконечный предел функции в точке и на бесконечности.
23. Односторонние пределы. Формулировка теоремы существования предела функции.
24. Бесконечно малые, бесконечно большие и ограниченные функции. Их свойства.
25. Формулировки основных теорем о пределах функций. Следствия из теорем.
26. Неопределенности вида $(0/0)$, $(\infty - \infty)$, (∞/∞), $(0 \cdot \infty)$.
27. Формулировка теоремы о сжатой функции. Первый замечательный предел. Основные следствия.
28. Основные понятия о числовых последовательностях.
29. Число e. Второй замечательный предел.
30. Точки непрерывности и точки разрыва функции.
31. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
32. Определение производной, ее геометрический и физический смысл.
33. Дифференцируемость и непрерывность функции. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции в точке.
34. Формулы и правила дифференцирования.
35. Дифференцирование сложной функции, неявной функции и функции, заданной параметрически.
36. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический смысл производной второго порядка.
37. Формулировка основных теорем дифференциального исчисления. Их геометрический смысл.
38. Определение монотонных функций. Достаточные условия монотонности.
39. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума.
40. Наибольшее и наименьшее значения функции.
41. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
42. Асимптоты графика функции.
43. План полного исследования функции и построения ее графика.
44. Определение функции двух переменных. Область определения. Понятие окрестности точки, внутренней точки, открытого и замкнутого множеств, граничной точки, ограниченного и неограниченного множеств.
45. Предел и непрерывность функции двух переменных.
46. Частные приращения и частные производные функции двух переменных. Полное приращение и полный дифференциал.
47. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
48. Производная функции $z = f(x; y)$ по направлению. Градиент функции, его физический смысл.

1 курс, 2 семестр

1. Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных высших порядков.
2. Экстремум функции двух переменных.
3. Первообразная и неопределенный интеграл.
4. Основные свойства неопределенного интеграла.
5. Таблица неопределенных интегралов основных элементарных функций.
6. Метод непосредственного интегрирования.

7. Метод интегрирования заменой переменной.
8. Метод интегрирования по частям. Три группы интегралов, вычисляемые методом интегрирования по частям.
9. Специальные приемы вычисления интегралов от тригонометрических функций вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.
10. Специальные приемы вычисления интегралов от иррациональных функций вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$.
11. Определение определенного интеграла. Теорема существования определенного интеграла.
12. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем значении непрерывной функции.
13. Вычисление определенного интеграла: формула Ньютона-Лейбница, теорема о замене переменной и об интегрировании по частям.
14. Несобственные интегралы I рода.
15. Вычисление площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла.
16. Определение и основные понятия дифференциального уравнения первого порядка.
17. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
18. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли.
19. Определение и основные понятия дифференциального уравнения второго порядка.
20. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
21. Определение линейного неоднородного и однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Понятие линейной независимости двух функций. Свойства решений однородного уравнения.
22. Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае действительных корней характеристического уравнения.
23. Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае комплексных корней характеристического уравнения.
24. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов.
25. Определение матрицы, её порядков и размера. Понятие матрицы-строки и матрицы-столбца. Квадратная матрица: её порядок, главная и побочная диагонали. Определения диагональной, скалярной, единичной и нулевой матриц.
26. Условия равенства двух матриц. Линейные операции над матрицами и их свойства.
27. Определение произведения двух матриц, две схемы умножения матриц. Свойства операции умножения матрицы на матрицу, понятие перестановочных матриц.
28. Определение целой положительной степени квадратной матрицы и его следствия. Определение операции транспонирования матрицы и её свойства.
29. Определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков. Правило Сарруса. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента определителя. Формулировка теоремы разложения, формулы Лапласа.
30. Определитель квадратной матрицы n-го порядка. Свойства определителей и их следствия.
31. Определение обратной матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Вычисление обратной матрицы 3-го порядка.
32. Решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными с помощью обратной матрицы. Вывод формул Крамера.
33. Основные понятия общей теории систем линейных уравнений.

34. Определение линейной системы с базисом. Базисные и свободные неизвестные. Анализ двух возможных случаев системы с базисом. Определения общего, частного и базисного решений. Решение системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.
35. Понятие о вычислении обратной матрицы методом Жордана-Гаусса.
36. Определение минора k-го порядка матрицы. Определение ранга матрицы. Формулировка теоремы Кронекера-Капелли об условии совместности линейной системы.
37. Исследование однородной линейной системы и её решение.
38. Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы.

2.2.2 Примерное экзаменационное тестовое задание (примерный экзаменационный билет)

1 курс, 1 семестр

Экзаменационный билет №___
1. Определение и основные свойства функции.
2. Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.
3. Найдите координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-4x+8y-16=0$.
4. Найдите координаты вектора $\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}$, если $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{b}=-3\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

1 курс, 2 семестр

Экзаменационный билет №___
1. Экстремум функции $y = f(x)$. Необходимые и достаточные условия экстремума.
2. Метод непосредственного интегрирования.
3. Проверьте, что для функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ выполняется равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.
4. Найдите частное решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y''-2xy'=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=3$.

2.3 Методические материалы и типовые контрольные задания, используемые для текущего контроля по дисциплине

2.3.1 Методические материалы, используемые для текущего контроля знаний по дисциплине

Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
Контрольный опрос	Контрольный опрос – это метод оценки уровня освоения компетенций, основанный на непосредственном (беседа, интервью) или опосредованном (анкета) взаимодействии преподавателя и студента. Источником контроля знаний в данном случае служит словесное или письменное суждение студента	Примерный перечень вопросов к зачету и экзамену Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение Задания для самостоятельной работы
Домашнее задание	Домашние задания – одна из основных форм самостоятельной работы студентов, направленная на усвоение и закрепление полученных знаний на занятиях.	Домашние задания
Контрольная работа	Эффективный метод проверки знаний обучающихся, полученных ими на определенном этапе. Основная задача	Задания для контрольной работы

Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
	контрольных работ – выявить, какие изученные темы вызывают затруднения и впоследствии искоренить недостатки	

2.3.2 Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение

1 курс, 1 семестр

1. Декартовы координаты точки на прямой и на плоскости.
2. Две простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.
3. Составление уравнения линии как геометрического места точек, обладающих заданным свойством.
4. Уравнение прямой: а) проходящей через данную точку в данном направлении; б) с угловым коэффициентом; в) проходящей через две данные точки; г) общее уравнение прямой.
5. Уравнение пучка прямых.
6. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.
7. Расстояние от точки до прямой.
8. Смешанные задачи на прямую.
9. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.
10. Декартовы координаты, длина и направляющие косинусы вектора.
11. Линейные операции над векторами в координатной форме. Разложение вектора по базису на плоскости.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства.
13. Уравнение плоскости.
14. Уравнения прямой. Прямая и плоскость.
15. Функция. Область определения функции.
16. Раскрытие неопределённости вида (0/0), заданной отношением многочленов.
17. Раскрытие неопределённостей вида (0/0), заданных иррациональными выражениями.
18. Раскрытие неопределённостей вида (∞/∞), заданных отношением многочленов.
19. Раскрытие неопределённостей вида ($\infty-\infty$).
20. Первый замечательный предел.
21. Второй замечательный предел.
22. Нахождение производных с помощью таблицы и правил дифференцирования основных элементарных функций.
23. Производные сложных функций.
24. Дифференциал функции.
25. Производные неявных функций.
26. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя.
27. Уравнение касательной и нормали к графику функции, заданной параметрически.
28. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a; b]$.
29. Исследование функций и построение графиков.
30. Нахождение области определения функции двух переменных.
31. Частные производные первого порядка.
32. Полный дифференциал функции двух переменных.
33. Производная по направлению. Градиент.

1 курс, 2 семестр

1. Частные производные высших порядков.
2. Экстремум функции двух переменных.
3. Метод непосредственного интегрирования.
4. Метод интегрирования заменой переменной.

5. Метод интегрирования по частям.
6. Специальные приёмы вычисления интегралов от тригонометрических и иррациональных функций вида: 1) $\int \sin^m x \cos^n x dx$; 2) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$.
7. Вычисление определённого интеграла.
8. Вычисление несобственных интегралов 1-го рода.
9. Вычисление площади плоской фигуры.
10. Решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.
11. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли.
12. Специальные приемы решения дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка: 1) $y'' = f(x)$; 2) $F(x; y'; y'') = 0$; 3) $F(y; y'; y'') = 0$.
13. Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
14. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов.
15. Операции над матрицами и их свойства.
16. Свойства операций над матрицами.
17. Определители, их свойства и вычисление.
18. Определители высших порядков.
19. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.
20. Решение системы 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными по формулам Крамера и методом обратной матрицы.
21. Решение линейных систем методом Гаусса.
22. Решение линейных систем методом Жордана-Гаусса.
23. Вычисление обратной матрицы методом Жордана – Гаусса.
24. Вычисление ранга матрицы методом Жордана – Гаусса.
25. Исследование совместности линейных систем по теореме Кронекера – Капелли.
26. Вычисление собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы.

2.3.3 Задания для самостоятельной работы

1. Найдите величину AB и длину $|AB|$ отрезка $\overline{AB}$, заданного точками:
а) $A(3)$ и $B(11)$; б) $A(-5)$ и $B(-3)$.

2. Вычислите координату точки A, если известны:
а) $B(-3)$ и $BA = 2$; б) $B(-1)$ и $|AB| = 5$.

3. Определите, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x; y)$, если:
а) $xy > 0$; б) $x - y = 0$; в) $x + y > 0$; г) $x - y > 0$.

4. Постройте точки $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$ и $D(0; 0)$. Если точки построены правильно, то получен квадрат. Какова его площадь? Чему равна длина стороны этого квадрата? Найдите координаты середин сторон квадрата.

5. Определите координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2; 2)$ и $Q(1; 5)$ разделен на три равные части.

6. Три вершины параллелограмма – точки $A(3; -5)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$. Определите четвертую вершину D, противоположную B.

7. Напишите уравнение окружности с центром $C(-2; 3)$ и радиусом, равным 5. Известно, что точка $A(a; -1)$ лежит на этой окружности. Найдите a.

8. Напишите уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1; 1)$, чем к точке $B(-4; 4)$.

9. Напишите уравнение множества точек, равноудаленных от точки $F(2; 2)$ и от оси Ox.

10. Напишите уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от

начала координат и от точки $A(-4; 2)$.

11. Определите траекторию точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1; 0)$, чем к прямой $x = -4$.

12. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $(-2; 3)$ и постройте ее.

13. Уравнения прямых привести к виду «в отрезках» на осях:

а) $2x - 3y = 6$; $3x - 2y + 4 = 0$.

14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4; 6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью, равной 6 кв. ед.

15. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45°; б) 60°; в) 135°; г) 0° – и построить ее.

16. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определите координаты его вершин.

17. Напишите уравнения двух прямых, проходящих через точку $A(4; 5)$, так, чтобы одна была параллельна оси Ox, другая параллельна оси Oy.

18. Определите угол между прямыми:

а) $5x - y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$; б) $3x - 4y = 6$ и $8x + 6y = 11$.

19. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6; 2)$ на прямую $x - 4y - 7 = 0$.

20. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4; 3)$ и параллельной другой прямой $x + 2y + 3 = 0$.

21. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ и $C(4; 0)$. Напишите уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найдите длину медианы AE.

22. Найдите расстояния точек $A(4; 3)$, $B(2; 1)$, $C(1; 0)$ и $O(0; 0)$ от прямой $3x + 4y - 10 = 0$. Постройте точки и прямую.

23. Найдите уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 5$, проходящей через точку $(1; 2)$.

24. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $5y = x + 6$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Напишите уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

25. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ и перпендикулярной к прямой $y = 2x$.

26. Покажите, что уравнение $x^2 + 2x + y^2 = 0$ задает на плоскости некоторую окружность.

27. Установите:

а) лежит ли точка $N(4{,}1; 1{,}9)$ на окружности с центром $C(1; -2)$ и радиусом 5;

б) лежит ли точка $K(0; 2\sqrt{6} - 2)$ на этой же окружности;

в) лежит ли точка $A(160; -1)$ на окружности с центром $(147; -6)$ и радиусом 13.

28. Постройте эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет.

29. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$;

б) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$;

в) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a - b = 1$.

30. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1\left(4; \dfrac{9}{5}\right)$ и $M_2\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3}; 2\right)$.

31. Эллипс проходит через точки $M_1\left(2; \sqrt{3}\right)$ и $M_2(0; 2)$. Напишите его уравнение и найдите расстояния точки M от фокусов.

32. Найти длину хорды эллипса $x^2 + 2y^2 = 18$, делящей угол между осями пополам.

33.Ординаты всех точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ сокращены втрое. Напишите уравнение полученной новой кривой.

34. Постройте гиперболу $16x^2 – 9y^2 = 144$. Найдите:

а) действительную и мнимую полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот.

35. Гипербола проходит через точку $M(6; -2\sqrt{2})$ и имеет мнимую полуось $b = 2$. Напишите ее уравнение и найдите расстояния точки M от фокусов.

36. Определите траекторию точки M, которая движется так, что остается вдвое дальше от точки $F(–8; 0)$, чем от прямой $x = –2$.

37. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найдите: а) координаты фокуса; б) уравнение директрисы.

38. Напишите уравнение параболы и уравнение директрисы, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и что точка пересечения прямых $y = x$ и $x + y = 2$ лежит на параболе.

39. Напишите уравнение множества точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = –4$. Найдите точки пересечения этой кривой с осями координат и постройте ее.

40. Даны точки $A(3; –1; 2)$ и $B(–1; 2; 1)$. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

41. Найдите длину вектора $\bar{a} = \{20; 30; -60\}$ и его направляющие косинусы.

42. Определите точку N, с которой совпадает конец вектора $\bar{a} = \{3; -1; 4\}$, если его начало совпадает с точкой $M(1; 2; –3)$.

43. Вектор $\bar{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Вычислите его координаты при условии, что $|\bar{a}| = 2$.

44. В прямоугольнике $OACB$ точки M и N – середины сторон BC и AC. Разложите вектор $\overline{OC} = \bar{c}$ по векторам $\overline{OM} = \bar{a}$ и $\overline{ON} = \bar{b}$.

45. Даны два вектора: $\bar{a} = \{3; -2; 6\}$ и $\bar{b} = \{-2; 1; 0\}$. Определите проекции на координатные оси следующих векторов: а) $\bar{a} + \bar{b}$; б) $\bar{a} - \bar{b}$; в) $2\bar{a}$; г) $-\frac{1}{2}\bar{b}$; д) $2\bar{a} + 3\bar{b}$; е) $\frac{1}{3}\bar{a} - \bar{b}$.

46. Определите, при каких значениях α, β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны.

47. Даны векторы $\bar{a} = \{4; -2; -4\}$, $\bar{b} = \{6; -3; 2\}$. Вычислите: а) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; б) $(\bar{a} - \bar{b})^2$.

48. Определите угол между векторами $\bar{a} = \{2; -4; 4\}$ и $\bar{b} = \{-3; 2; 6\}$.

49. Определите, при каком значении m векторы $\bar{a} = m\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - m\bar{k}$ взаимно перпендикулярны.

50. Раскройте скобки в выражении $(2\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot \bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$.

51. Даны точки $M_1(0; –1; 3)$ и $M_2(1; 3; 5)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

52. Найдите расстояние между параллельными плоскостями $4x + 3y – 5z – 8 = 0$ и $4x + 3y – 5z + 12 = 0$.

53. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; –2; –7)$ параллельно плоскости $2x – 3z + 5 = 0$.

54. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $(1; –2; 1)$ и $(3; 1; –1)$.

55. Напишите параметрические уравнения прямой: а) проходящей через точку $M_0(–2; 1; –1)$ и параллельно вектору $\bar{a} = \{1; -2; 3\}$; б) проходящей через точки $M_1(3; –1; 4)$ и $M_2(1; 1; 2)$.

56. Докажите, что прямая $x = 3t – 2$, $y = –4t + 1$, $z = 4t – 5$ параллельна плоскости $4x – 3y – 6z – 5 = 0$.

57. Найдите точку пересечения прямой и плоскости:

а) $x = 2t – 1$, $y = t + 2$, $z = 1 – t$, $3x – 2y + z – 3 = 0$;

б) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, $x + 2y + 2z - 29 = 0$.

58. Найдите область определения функций:

а) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$; б) $y=\sqrt{4-x^2}$;

в) $y=\log_5(2x-1)$.

59. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$.

60. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+4}{x^2+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+5x+1}{3+14x^2+2x}$.

61. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-5x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

62. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 10x}{\sin 9x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\sec 2x-1}$.

63. Найдите производные функций:

1) $y=x^4+3x^2-2x+1$; 2) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+4$;

3) $y=3+4x^2+\sqrt[5]{x^3}+\frac{1}{x^2}+\sin x+\cos x+\ln x$; 4) $y=4e^x+\operatorname{arctg} x+\arcsin x$;

5) $y=e^x-\frac{\operatorname{tg} x}{2}+\frac{x^4}{4}$; 6) $y=\arcsin x+3\sqrt[3]{x}+5\arccos x$;

7) $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$; 8) $y=x\cos x$;

9) $y=x\arccos x$; 10) $y=\sqrt[3]{x}\operatorname{arcctg} x$;

11) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 12) $y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$;

13) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$; 14) $f(x)=\frac{1-10^x}{1+10^x}$, найдите $f'(0)$;

15) $f(x)=x\ln x$, найдите $f'(1)$, $f'(e)$, $f'(1/e)$, $f'(1/e^2)$.

64. Найдите производные функций:

1) $y=\frac{1}{b}\cos(a-bx)$; 2) $y=\sqrt{1-x^2}$;

3) $y=\sin^2 x$; 4) $y=\operatorname{tg}(x^2+3)$;

5) $y=\ln\cos x$; 6) $y=\ln(1+\cos x)$;

7) $y=\ln(x^2+2x)$; 8) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$;

9) $y=\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}$; 10) $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$;

11) $y=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$.

65. Найдите производные функций:

1) $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$; 2) $y=\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x+3x$;

3) $y=\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}$; 4) $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

5) $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$; 6) $y=(x+2)e^{-x^2}$;

7) $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$; 8) $y=\log_5\cos 7x$;

9) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$; 10) $y=\arccos(1-2x)$;

11) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; 12) $y=\ln\arccos 2x$;

13) $y=e^{\sqrt{1+\ln x}}$.

66. Найдите производные функций:

а) $y=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$; б) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$;

в) $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$; г) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$;

д) $y=\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$; е) $y=\ln arctg\sqrt{1+x^2}$.

67. Найдите дифференциалы функций:

а) $y=\sin^3 2x$; б) $y=\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$.

68. Найдите производные неявных функций:

а) $x\sin y+y\sin x=0$; б) $x^3+y^3=\sin(x-2y)$;

в) $e^{xy}-\cos(x^2+y^2)=0$.

69. Найдите пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x})$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

70. Найдите промежутки возрастания и убывания функций:

а) $y=x^3-6x^2+4$; б) $y=\frac{1}{3x-2}$;

в) $y=\frac{1}{1+x^2}$; г) $y=\frac{x^2-1}{x}$;

д) $y=\sqrt{x-x^2}$; е) $y=x-e^x$.

71. Найдите экстремумы функций:

а) $y=x^3-3x^2$; б) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$;

в) $y=\sqrt[3]{x^2}-1$; г) $y=x\sqrt{1-x}$;

д) $y=x+\cos x$, $x\in(0;\pi)$; е) $y=\frac{\ln x}{x}$.

72. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

а) $y=-x^3+9x^2-24x+10$, $x\in[0;3]$; б) $y=x+2\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$;

в) $y=\frac{x-1}{x+1}$, $x\in[0;4]$; г) $y=\sin 2x-x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

73. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

а) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$; б) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;

в) $y=\frac{x}{x^2-5x+4}$.

74. Составьте уравнения касательной и нормали, проведенных к кривой $y=x^3$ в точке $M(1;\ 1)$.

75. В каких точках кривой $y=2+x-x^2$ касательная к ней: 1) параллельна оси Ox; 2) параллельна прямой $y=x$?

76. Точка движется прямолинейно по закону $S=6t-t^2$. В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю?

77. Дано уравнение прямолинейного движения точки: $S=2t^3+t^2-4$. Вычислите скорость и ускорение в момент времени $t=4$.

78. Найдите частные производные первого порядка функций:

а) $z=2y+e^{x^2-y}+1$; б) $z=x^5\sin^3 y$;

в) $z=\cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$; г) $u=x^y+(xy)^z+z^{xy}$.

79. Докажите, что функция $z=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$ удовлетворяет равенству $F=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}$.

80. Найдите частные производные второго порядка функций:

а) $z=x^4-2x^2y^3+y^5-1$; б) $z=(5x^2y-y^3+7)^3$;

в) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; г) $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

81. Докажите, что функция $z=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$ удовлетворяет равенству $F=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

82. Найдите полный дифференциал функции $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

83. Вычислите приближенно с помощью полного дифференциала: $1{,}02^{2{,}99}$.

84. Даны функция $z=x^2+xy+y^2$, точка $A(1;1)$ и вектор $\bar{a}=\{2;-1\}$. Найдите:

1) $\operatorname{grad} z$ в точке A;

2) производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

1 курс, 2 семестр

1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислите интегралы:

а) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; б) $\int(2^x+3^x)dx$;

в) $\int(\sin x+5\cos x)dx$; г) $\int\left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$;

д) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right)dx$; е) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$;

ж) $\int\frac{5x^8+1}{x^4}dx$; з) $\int\frac{3tg^2x+4}{\sin^2 x}dx$.

2. Вычислите интегралы:

а) $\int\sin 7xdx$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$;

в) $\int\frac{dx}{9x^2-1}$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-5}}$.

3. Вычислите интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$; 2) $\int\sqrt{2x-5}dx$;

3) $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

5) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$; 6) $\int tg\ xdx$;

7) $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$; 8) $\int\frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}dx$;

9) $\int\frac{xdx}{\sqrt{2-x^4}}$ $(t=x^2)$; 10) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-3}}$ $(t=x^4)$;

11) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$ $(t=1+\ln x)$; 12) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

4. Вычислите интегралы:

а) $\int e^{-x^3}x^2dx$ $(t=e^{-x^3})$; б) $\int e^{\sin x}\cos xdx$;

в) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; г) $\int\frac{e^{arctg\,x}}{1+x^2}dx$;

д) $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}dx$ $(t=x^3-8)$; е) $\int\frac{(arctg\ x)^{100}}{1+x^2}dx$ $(t=arctg\ x)$;

ж) $\int\sqrt{3+\cos 5x}\sin 5xdx$; з) $\int\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

и) $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{5-e^{2x}}}$.

5. С помощью метода интегрирования по частям вычислите интегралы:

1) $\int xe^{-x}dx$; 2) $\int x\sin xdx$;

3) $\int x^2\cos xdx$; 4) $\int x^2e^xdx$;

5) $\int\ln xdx$; 6) $\int(x^2+3x+2)\ln xdx$;

7) $\int x\mathrm{arctg}\ xdx$; 8) $\int\arcsin xdx$;

9) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 10) $\int e^x \sin xdx$.

6. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; б) $\int \cos^3 x \sin xdx$;

в) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$; г) $\int \sin^3 xdx$;

д) $\int \sin^3 x \cos^2 xdx$; е) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$;

ж) $\int (1+2\cos x)^2 dx$; з) $\int tg^4 xdx$.

7. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos xdx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x^2}{1+x^2}dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;

д) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 xdx$; е) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

ж) $\int\limits_1^e \ln^2 xdx$; з) $\int\limits_{-1}^1 x^2 e^{-x}dx$.

8. Исследовать сходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin xdx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln xdx}{x^2}$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

9. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y^2 = 2px,\ x = h$; б) $y = x^2,\ y = 1$;

в) $y = \cos^2 x - \sin^2 x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$; г) $x^2 - y^2 = 1,\ x = 2$;

д) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$.

10. Покажите, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения:

а) $y = -\frac{2}{x^2},\ xy^2dx - dy = 0$; б) $x^2 - xy + y^2 = C,\ (x-2y)y' - 2x + y = 0$.

11. Решите дифференциальные уравнения:

а) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; б) $y'(1+y) = xy\sin x$;

в) $e^y(1+y') = 1$; г) $y' - xy^2 = 0$.

12. Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

а) $y' = 8\sqrt{y}$, $y(0) = 4$; б) $y'\sin x - y\ln y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

в) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$, $y(1) = 2$.

13. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдет тело за 5 сек. от начала движения, если известно, что за 1 сек. оно проходит путь 8 м, а за 3 сек. – 40 м?

14. Известно, что тело охлаждается в течение 15 мин. от 100° до 80°. Через сколько мин. температура тела понизится до 40°, если температура окружающей среды составляет 10°? (Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды).

15. Решите дифференциальные уравнения:

а) $y' - 2xy = e^{x^2}$; б) $xy' + y - 3x^2 = 0$;

в) $y^2 dx + (x+2)dy = 0$; г) $(x+1)y' - 2y = y^2(x+1)^5$.

16. Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

а) $xy' - y - x^3 = 0,\ y(2) = 4$; б) $y'\sin x - y\cos x = 1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $dx + (xy - y^3)dy = 0,\ y(-1) = 0$; г) $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2\sqrt[4]{y^3}$, $y(1) = 1$.

17. Решите дифференциальные уравнения:

а) $y'' = \sin 2x$; б) $y'' = 4\cos^4 x + 2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{x+2}$;

в) $y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - x\sin x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$;

г) $y'' - 2(2x^2 + 2x - 5)\cos 2x - 4(2x+1)\sin 2x,\ y(0) = y'(0) = 0$.

18. Решите дифференциальные уравнения:

а) $y'' + y' tg\ x - \sin 2x = 0$; б) $xy''\ln x = y'$;

в) $y''(1 + \ln x) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln x,\ y(1) = 0{,}5,\ y'(1) = 1$;

г) $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln\frac{y'}{x}\right),\ y(1) = 0{,}5,\ y'(1) = 1$.

19. Решите дифференциальные уравнения:

а) $yy'' + (y')^2 - (y')^3\ln y = 0$; б) $(y'')^2 - 2y'y'' + 3 = 0$;

в) $3y'y'' = y + (y')^3 + 1,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$; г) $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.

20. Установите линейную зависимость или независимость данных пар функций на областях их определения:

а) x, $\cos x$; б) x, $2x$;

в) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

21. Решите дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 5y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 7,\ y'(0) = 8$;

в) $9y'' + 12y' + 4y = 0$; г) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;

д) $y'' + 4y = 0$; е) $5y'' + 3y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.

22. Найдите общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'' - 2y' + y = x + 1$; б) $y'' - 4y' + 3y = xe^7$;

в) $y'' + y = \sin x$; г) $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$.

23. Найдите частное решение дифференциального уравнения:

а) $y'' + y = 4xe^x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0$; б) $y'' + y = 4\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

в) $y'' + 9y = 6\cos 3x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3$; г) $y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x,\ y(0) = y'(0) = 0$.

24. Найдите матрицу $C = -5A + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. Найдите произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

26. Найдите те из произведений матриц AB и BA, которые существуют:

а) $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3\\1&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$.

27. Найдите значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$.

28. Найдите произведение матриц $\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$.

29. Найдите те из произведений матриц AB и BA, которые существуют:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}5&1\\0&2\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

30. Найдите матрицу A^5 и ее след: $A=\begin{pmatrix}4&-1\\5&-2\end{pmatrix}$.

31. Найдите значение многочлена $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}5&2&-3\\1&3&-1\\2&2&1\end{pmatrix}$.

32. Вычислите определитель второго порядка $\begin{vmatrix}2&-3\\-3&2\end{vmatrix}$.

33. Вычислите определитель третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}5&6&3\\0&2&0\\7&4&5\end{vmatrix}$.

34. Решите уравнение $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1-x&1\\1&1&2-x\end{vmatrix}=0$.

35. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix}2&-3&4&1\\4&-2&3&2\\a&b&c&d\\3&-1&4&3\end{vmatrix}$, разлагая его по элементам 3-й строки;

б) $\begin{vmatrix}a&1&2&0\\b&3&1&4\\c&0&1&2\\d&1&1&0\end{vmatrix}$, разлагая его по элементам 1-го столбца.

36. Вычислите определители 4-го порядка:

а) $\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\-5&8&2&7\\4&-5&3&-2\\-7&8&4&5\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}3&5&7&2\\7&6&3&7\\5&4&3&5\\-5&-6&-5&-4\end{vmatrix}$.

37. Вычислите определители 4-го порядка:

а) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&-1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$.

38. Найдите обратную матрицу A^{-1} двумя способами – с помощью присоединения матрицы

и с помощью элементарных преобразований:

а) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 8 & 0 & -4\\ 2 & 2 & -4 & -3\\ 3 & 8 & -1 & -6\end{pmatrix}$.

39. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; б) $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 5 & 5\end{pmatrix}$; г) $A\cdot X=B$, где $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6\\ 7\end{pmatrix}$;

д) $A\cdot B'\cdot X=C$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -4 & 0\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -8\end{pmatrix}$.

40. Методом обратной матрицы и по формулам Крамера решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3x_1-4x_2=-6,\\ 3x_1+4x_2=18;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\ 2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}$

41. Методом Гаусса решите системы линейных уравнений и найдите все базисные решения:

а) $\begin{cases}-2x_1+3x_2-2x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+x_3=2,\\ -5x_1+10x_2-7x_3=10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4,\\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1,\\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7,\\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2,\\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+5x_4=3,\\ -3x_1-2x_2+12x_3-7x_4=-5,\\ 2x_2+3x_3+4x_4=2;\end{cases}$

д) $\begin{cases}-6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4,\\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2,\\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3;\end{cases}$ е) $\begin{cases}x_1+5x_2+3x_3=2,\\ 2x_1+9x_2+5x_3+3x_4=7,\\ x_1+3x_2+x_3+6x_4=8.\end{cases}$

42. Найдите ранги матриц:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ -4 & -3 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 0\\ -4 & -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

43. Исследуйте систему уравнений относительно параметра α и найдите общее решение системы:

а) $\begin{cases}-x_1+3x_2-4x_3=1,\\ 2x_1+2x_2+\alpha x_3=1,\\ -2x_2+3x_3=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\alpha x_1+2x_2+3x_3=3,\\ -x_1+4x_3=2,\\ x_1+2x_2-x_3=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x_1+2x_3=3,\\ 3x_1+\alpha x_2+6x_3=9,\\ -2x_1+x_2+x_3=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=2,\\ -x_1+2x_2+x_3=\alpha-2,\\ 3x_1-3x_2+6x_3=6-\alpha.\end{cases}$

44. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -6\\ 1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.3.4 Тесты по дисциплине

Вариант № ___

1. Расстояние между точками $A(1;\,2)$ и $B(k;\,-1)$ равно 5 при k равном…

варианты ответов:

а) –3 б) –1 в) 17 г) 6

2. Даны точки $A(4;\,–3)$ и $B(2;\,5)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…

варианты ответов:

а) $(3;\,2)$ б) $(3;\,1)$ в) $(-1;\,4)$ г) $(6;\,2)$

3. Прямая проходит через точки $O(0;\,0)$ и $B(-3;\,9)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…

варианты ответов:

а) 9 б) 3 в) –3 г) –9

4. Установите соответствие между элементами:

А) Общее уравнение прямой 1) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$

Б) Уравнение прямой с угловым коэффициентом 2) $y=3x-7$

В) Уравнение прямой в отрезках на осях 3) $2x-3y+1=0$

варианты ответов:

а) А) ↔ 1) Б) ↔ 3) В) ↔ 2)

б) А) ↔ 3) Б) ↔ 2) В) ↔ 1)

в) А) ↔ 2) Б) ↔ 1) В) ↔ 3)

г) А) ↔ 2) Б) ↔ 3) В) ↔ 1)

5. Если уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, то длина его большой полуоси равна…

варианты ответов:

а) 4 б) 9 в) 16 г) 3

6. Нормальный вектор плоскости $2x+3y-7z+1=0$ имеет координаты…

варианты ответов:

а) {2; –3; 7} б) {2; 3; 7} в) {2; 3; –7} г) {2; 3; 1}

7. Направляющий вектор прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$ имеет координаты…

варианты ответов:

а) {2; 3; 2} б) {2; 3; –2} в) {3; –1; 0} г) {2; –3; 1}

8. Значение предела $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ равно:

варианты ответов:

а) 4; б) 3; в) 2; г) 1.

9. Точка $x=5$ для функции $y=\frac{x^2-25}{x-5}$ является:

варианты ответов:

а) точкой разрыва II-го рода; б) точкой скачка;

в) точкой непрерывности; г) точкой устранимого разрыва.

10. Производная функции $y=x\cdot\ln^2 x$ имеет вид:

варианты ответов:

а) $\ln^2 x+\frac{2}{x}\ln x$; б) $2\ln^2 x-x\cdot\ln x$; в) $\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x$; г) $x\cdot\ln x$.

11. Производная функции $y=\arcsin\frac{1}{x}$ в точке $x=-2$ равна:

варианты ответов:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

12. Вторая производная функции $y=\sin x^2$ имеет вид:
варианты ответов:
а) $\cos x\cdot 2x$; б) $y=-2\sin x\cdot\cos^2 x$; в) $\cos x^2\cdot 2x$; г) $2x^2$.

13. Дифференциал функции $y=\frac{6x^2}{e^x}$ имеет вид:
варианты ответов:
а) $\frac{24x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^x}$; б) $\frac{6x\cdot(2-x)}{e^x}$; в) $\frac{3x\cdot(2-x)}{e^{2x}}$; г) $\frac{e^{2x}+12x^2}{e^x}$.

14. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2\ln x$ в точке $x=2$ равен:
варианты ответов:
а) 4; б) 1; в) –1; г) 0.

15. Точкой минимума функции $y=2x^2+4x+2$ является:
варианты ответов:
а) 1; б) –1; в) 0; г) 4.

16. Абсциссой точки перегиба графика функции $y=\frac{1}{3}x^3-2x$ является:
варианты ответов:
а) 0; б) –1; в) $\frac{1}{4}$; г) 2.

17. Областью определения функции $z=\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}$ является множество:
варианты ответов:
а) действительных чисел **R**; б) пар действительных чисел $\mathbf{R}^2$;
в) пар точек плоскости *Oxy*, удовлетворяющих условиям $x\ge 1,\ y\ge -2$;
г) пар точек плоскости *Oxy*, удовлетворяющих условиям $x\le 1,\ y>-2$.

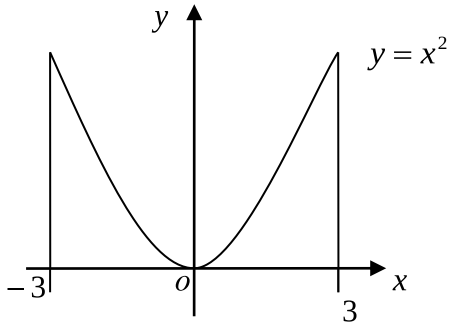
18. Частная производная функции $z=x\ln y+\frac{y}{x}$ по переменной *y* равна:
варианты ответов:
а) $z'_y=\frac{x+1}{xy}$; б) $z'_y=\frac{x^2+y}{xy}$; в) $z'_y=\frac{x^2+1}{xy}$; г) $z'_y=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}$.

19. Дифференциал функции $z=x\sin y$ в точке $\left(-1;-\frac{\pi}{2}\right)$ равен:
варианты ответов:
а) d*z* = d*x*; б) d*z* = –d*x*; в) d*z* = d*x* + d*y*; г) d*z* = –d*x* – d*y*.

20. Множество первообразных функции $y=\frac{1}{2x^2}$ имеют вид:
варианты ответов:
а) $-\frac{1}{2}x^{-2}$; б) $-\frac{1}{2x}+C$; в) $\frac{1}{2}x+C$; г) $\frac{1}{2x}+C$.

21. Определённый интеграл $\int_{-1}^{1}(2x-1)\,dx$ равен:
варианты ответов:
а) 0; б) 1; в) 4; г) 2.

22. Площадь криволинейной трапеции определяется формулой:



варианты ответов:

а) $\int_{-3}^{3}\left(x^2+1\right)dx$; б) $\int_{-3}^{3}x^2\ dx$; в) $\int_{-2}^{2}x^2\ dx$; г) $\int_{0}^{2}x^2\ dx$.

23. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2}=xdx$ имеет вид:

варианты ответов:

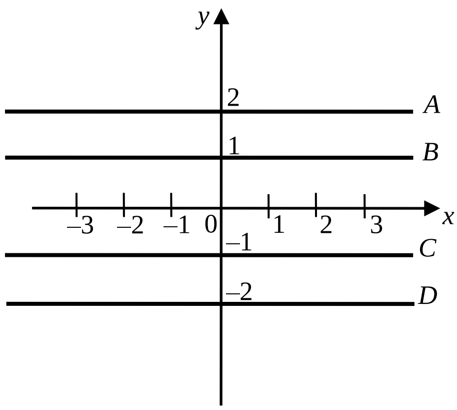
а) $-\frac{1}{y}=\frac{x^2}{2}+C$; б) $-\frac{1}{y}=x^2+C$; в) $\frac{1}{y}=\frac{x^2}{2}+C$; г) $y=\frac{x^2}{2}+C$.

24. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''-y'-30y=x+8$ по виду его правой части соответствует функция:

варианты ответов:

а) $f(x)=e^{-5x}(Ax+B)$; б) $f(x)=Ax+B$; в) $f(x)=Ae^{-5x}+Be^{6x}$; г) $f(x)=Ax^2+Bx$.

25. Дано дифференциальное уравнение $xy'=y-2$ при $y(1)=2$. Тогда интегральная кривая, которая определяет решение этого уравнения, имеет вид:



варианты ответов:

а) *D*; б) *A*; в) *B*; г) *C*.

26. Дифференциальное уравнение $y'-xy=e^x$ является:

варианты ответов:

а) линейное неоднородное дифференциальное уравнение I-го порядка;
б) уравнение Бернулли;
в) однородное дифференциальное уравнение;
г) уравнение с разделяющимися переменными.

27. Определитель $\begin{vmatrix}1 & 3\alpha+2\\ 2 & 10\end{vmatrix}$ равен 0 при $\alpha=\ldots$

варианты ответов:

а) 0 б) 1 в) 2 г) –1

28. Определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен…

варианты ответов:

а) –76 б) 83 в) 29 г) –37

29. Дан определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$. Тогда алгебраическое дополнение элемента a_{13} равно…

варианты ответов:

а) 0 б) –6 в) 5 г) –3

30. Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x-5y=4, \\ 3x-3y=7 \end{cases}$ решается по формулам Крамера. Установите соответствие между определителями системы и их значениями.

1) Δ А) 9
2) Δ_1 Б) 23
3) Δ_2 В) 2
Г) –2

варианты ответов:

а) 1) ↔ А) 2) ↔ Б) 3) ↔ В)
б) 1) ↔ Г) 2) ↔ В) 3) ↔ Б)
в) 1) ↔ А) 2) ↔ Г) 3) ↔ Б)
г) 1) ↔ Г) 2) ↔ А) 3) ↔ В)

2.3.5 Типовые задания

Типовой расчет № 1. Аналитическая геометрия

Вариант № ___

Задание 1. Даны вершины треугольника $A(1; –1)$, $B(7; 2)$, $C(4; 5)$. Найдите:

а) длину стороны *AB*;
б) внутренний угол *A*;
в) уравнение высоты *CD*;
г) длину высоты *CD*;
д) уравнение медианы *CE*;
е) точку пересечения высот треугольника.

Сделайте точный чертёж.

Задание 2. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудалённых от точки $F(0; 4)$ и от прямой $y = 2$. Сделайте:

а) схематический рисунок;
б) постройте линию по её уравнению.

Задание 3. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси *Ox*, проходит через точку $M(2\sqrt{3}; 1)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{14}}{4}$. Составьте уравнение эллипса.

Задание 4. Даны точки $A(1; –1; 6)$, $B(4; –2; 5)$, $C(3; –1; 0)$. Найдите:

а) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
б) уравнение плоскости *P*, проходящей через точку *A* перпендикулярно вектору $\overline{AB}$;
в) расстояние от точки *C* до плоскости *P*;
г) уравнения прямой *L*, проходящей через точки *B* и *C*;
д) точку пересечения прямой *L* с плоскостью *P*.

Сделайте схематический чертеж.

Критерии оценки: правильность выполнения каждого задания оценивается в баллах. Задания 1 и 4 оцениваются в баллах от 0 до 3, задания 2 и 3 – от 0 до 2 включительно.

Типовой расчет № 2. Исследование функций

Вариант № ___

Задание 1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ по правилу Лопиталя.

Задание 2. Составьте уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=\dfrac{t^2+1}{t-1}, \\ y=\dfrac{t}{t^2+1}, \end{cases}$ в точке (x_0; y_0), соответствующей заданному значению параметра $t = t_0 = 2$.

Задание 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x-2\sqrt{x}$ на заданном отрезке [0; 4].

Задание 4. Выполните полное исследование функции $y=\dfrac{x^2(x-2)}{(x+1)^2}$ и постройте её график по результатам исследования.

Критерии оценки: правильность выполнения каждого задания оценивается в баллах. Задания 1, 2, 3 оцениваются в баллах от 0 до 2, задание 4 – от 0 до 3 включительно.

2.3.6 Задания для контрольной работы

Контрольная работа № 1. Предел и непрерывность функции

Вариант № ___

Найдите пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+7x-15}{x^2+2x-15}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-3x}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{4x+5}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Критерии оценки: правильность выполнения заданий оценивается в баллах от 0 до 2.

Контрольная работа № 2. Производная и дифференциал

Вариант № ___

Найдите производные.

1. $y=\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}+x\sqrt{x}$.
2. $y=\dfrac{x^2-5x-1}{x^3}$.
3. $y=3^{\frac{1}{\sin x}}+\operatorname{tg} 3^x$.
4. $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$.
5. $y=\ln^2 x+\sin^2 x$.
6. $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$.
7. $xe^y+ye^x=2$.

Критерии оценки: правильность выполнения каждого задания оценивается в баллах от 0 до 2 включительно.

Контрольная работа № 3. Функции нескольких переменных

Вариант № ___

Задание 1. Найдите и изобразите на рисунке область определения функции $z=\ln(1+4x-y^2)$.

Задание 2. Дана функция $z=x\ln\dfrac{y}{x}$. Покажите, что $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

Задание 3. Дана функция $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, точка $A(1; -2)$ и вектор $\bar{l}=4\bar{i}-3\bar{j}$. Найдите градиент функции и производную по направлению вектора $\bar{l}$.

Критерии оценки: правильность выполнения каждого задания оценивается в баллах от 0 до 2 включительно.

Контрольная работа № 4. Неопределенный интеграл

Вариант № ___

Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.

2. $\int \frac{dx}{(3x+2)^3}$.

3. $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{25^x - 1}}$.

4. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$.

5. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

6. $\int (x^2 - x)\ln x dx$.

Критерии оценки: правильность выполнения каждого задания оценивается в баллах от 0 до 3 включительно.

Контрольная работа № 5. Дифференциальные уравнения

Вариант № ___

Задание 1. Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $x^2 y' + (1-2x)y = x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Задание 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' \cos^4 x = -\sin 2x$, допускающего понижение порядка, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$.

Задание 3. Найдите частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 4y' = 5\cos 2x$ с правой частью специального вида, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \frac{3}{4}$, $y'(0) = 5$.

Критерии оценки: правильность выполнения каждого задания оценивается в баллах от 0 до 3 включительно.

Контрольная работа № 6. Линейная алгебра

Вариант № ___

Задание 1. Вычислите матрицу $D = 2(AB)^{\mathrm{T}} - 3C^2 + 4E_2$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 8 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 8 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Решите систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Задание 3. Найдите матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Критерии оценки: правильность выполнения каждого задания оценивается в баллах от 0 до 2 включительно.

2.3.7 Методика проведения лекции-беседы

Лекция-беседа - диалогический метод изложения и усвоения учебного материала. Лекция-беседа позволяет с помощью системы вопросов, умелой их постановки и искусного поддержания диалога воздействовать как на сознание, так и на подсознание обучающихся, научить их самокоррекции. Проведение лекции-беседы предполагает наличие определенного объема знаний об изучаемом материале и связи с ним. Лекция-беседа помогает побудить обучающихся к актуализации имеющихся знаний, вовлечь их в процесс самостоятельных размышлений, в эвристический, творческий процесс получения новых знаний; способствует активизации познавательной деятельности, вовлекает в максимальный мыслительный поиск, с целью разрешения противоречий, подводит к самостоятельному формированию выводов и обобщений, создает условия для оперативного управления процессом познания.

По назначению в учебном процессе выделяют следующие виды лекции-беседы:

– вводные или вступительные (организующие);

– сообщения новых знаний;

– закрепляющие.

Вводная лекция-беседа проводится в начале лекционного занятия. С ее помощью обеспечивается психологическая настройка обучающихся на восприятие и усвоение нового материала. Беседа способствует пониманию значения предстоящей работы, формирует представления о ее содержании, специфике и особенностях.

Сообщения новых знаний. Строится в форме вопросов и ответов преимущественно при анализе прочитанных текстов, запоминании ответов (катехизическая); способствует подведению обучающихся за счет умело поставленных вопросов, имеющихся знаний и жизненного опыта, к усвоению новых знаний, формулированию понятий, решению задач; создает субъективное впечатление, что обучающийся сам сделал открытие, проделал путь от практики к научной истине.

Закрепляющие лекции-беседы применяются для закрепления, обобщения и систематизации знаний.

Эффективность беседы зависит от тщательной подготовки преподавателя, продуманности и профессиональной формулировки вопросов в четкой постановке, их логической последовательности. Вопросы должны развивать все виды мышления, обеспечивать логическую форму мышления (весь спектр мыслительных действий), соответствовать уровню развития обучающихся; со стороны обучающихся ответы должны быть осознанными и аргументированными, полными, точными, ясными, правильно сформулированными.

Цель: путем постановки тщательно продуманной системы вопросов по заданной теме достижение понимания обучающимися нового материала или проверка усвоения ими уже изученного материала.

Задачи:

– изучение вопросов по заданной теме или закрепление изученного материала;

– развитие умений обучающихся структурировать и систематизировать материал, сопоставлять различные источники, обобщать материал, делать выводы;

– развитие навыков обучающихся по выработке собственной позиции по изучаемым проблемам.

Методика проведения лекции-беседы:

– назначение секретаря лекции-беседы, его инструктаж по выполняемым функциям;

– объявление критерий оценки;

– проведение беседы по заранее подготовленным преподавателем вопросам;

– подведение итогов беседы и оценка участников беседы по материалам, переход к информационной лекции.

2.3.8 Методика проведения интерактивного решения задач

Интерактивное решение задач – это метод, при котором при решении задач принимают участие все обучающиеся под руководством преподавателя-модератора. В результате получается углубленное познание обучающимися методики решения типовых профессиональных задач. В процессе интерактивного решения задачи обучающимся дается возможность предположить последующий алгоритм и результат ее решения. Применение на практике обучения метода интерактивного решения задач позволяет развивать у обучающихся способность прогнозирования и планирования решения профессиональных задач.

Цель: проверка навыков решения профессиональных задач и развитие мыслительных операций обучающихся, направленных на достижение результатов при решении профессиональных задач.

Задачи:

– проверка навыков применения обучающимися ранее усвоенных знаний при решении профессиональных задач;

– формирование навыков совместной деятельности подчиненных (обучающихся) и руководителя (преподавателя);

– овладение обучающимися знаниями и общими принципами решения проблемных профессиональных задач;

– развитие навыков активной интеллектуальной деятельности;

– развитие коммуникативных навыков (навыков общения);

– развитие навыков обучающихся по выработке собственной позиции по ходу решения профессиональных задач.

Методика проведения:

1. Первый этап «подготовка проекта решения задач». Преподавателем разрабатывается проект хода решения задачи с началом или фрагментами решения.

2. Второй этап «организационный»:

– объявление темы и цели решения задачи;

– объявление критерий оценки.

3. Третий этап «интеллектуальный»:

– объявление условий решения задач;

– индивидуальное решение задачи обучающимися, исходя из собственного мнения;

– высказывание обучающимися мнений по ходу решения задач;

– обсуждение результатов и методики индивидуального решения задач обучающимися и принятие плана верного хода решения;

4. Четвертый этап «подведение итогов решения задачи»:

– формулирование вывода решения задачи обучающимися;

– подведение итога интерактивного решения задачи преподавателем;

– оценка преподавателем обучающихся по материалам, подготовленным секретарем.

2.3.9 Методика организации работы в малых группах

Работа в малых группах - это одна из самых популярных стратегий, так как она дает всем обучающимся (в том числе и стеснительным) возможность участвовать в работе, практиковать навыки сотрудничества, межличностного общения (в частности, умение активно слушать, вырабатывать общее мнение, разрешать возникающие разногласия). Все это часто бывает невозможно в большом коллективе. При организации групповой работы, следует обращать внимание на следующие ее аспекты. Нужно убедиться, что обучающиеся обладают знаниями и умениями, необходимыми для выполнения группового задания. Нехватка знаний очень скоро даст о себе знать -обучающиеся не станут прилагать усилий для выполнения задания. Надо стараться сделать свои инструкции максимально четкими. Надо предоставлять группе достаточно времени на выполнение задания.

При работе в малой группе обучающиеся могут выполнять следующие роли:

– фасилитатор (посредник-организатор деятельности группы);

– регистратор (записывает результаты работы);

– докладчик (докладывает результаты работы группы);

– журналист (задает уточняющие вопросы, которые помогают группе лучше выполнить задание, например те вопросы, которая могла бы задать другая сторона в дискуссии);

– активный слушатель (старается пересказать своими словами то, о чем только что говорил кто-либо из членов группы, помогая сформулировать мысль);

– наблюдатель (должен отмечать признаки определенного поведения, заранее описанного преподавателем, и определять, как члены группы справляются с возникающими по ходу работы проблемами. Отчитываясь перед группой, наблюдатели обязаны представлять свои заметки в максимально описательной и объективной форме);

– хронометрист (следит за временем, отпущенным на выполнение задания) и другие.

Цель: проверка уровня освоения ранее изученного материала и формирование навыков работы в малых группах.

Задачи:

– активизация познавательной деятельности обучающихся;

– развитие навыков самостоятельной профессиональной деятельности: определение ведущих и промежуточных задач, выбор оптимального пути, умение предусматривать последствия своего выбора, объективно оценивать его;

– развитие умений успешного общения (умение слушать и слышать друг друга, выстраивать диалог, задавать вопросы на понимание и т. д.);

– совершенствование межличностных отношений коллективе.

Методика проведения:

1. Первый этап «Подготовка задания для работы в малых группах». Задания для работы в малых группах разрабатываются либо преподавателем, либо преподавателем совместно с обучающимися.

2. Второй этап «Организационный»:

– объявление темы и цели работы в малых группах;

– объяснение задания для работы в малых группах;

– объявление критерий оценки;

– деление обучающихся на группы;

– назначение ролей в группах.

3. Третий этап «Выполнение задания в группе»:

– высказывание обучающимися мнений по выполнению задания;

– обсуждение результатов и методики выполнения задания обучающимися и принятие плана хода выполнения задания;

– написание протокола малой группы по планированию деятельности при выполнении задания. Протокол должен содержать цель, задачи, методы, назначение ролей и норму времени выполнения задания;

– выполнение задания;

– подготовка отчета по проведенной работе. Отчет должен содержать описание цели, задач, методики выполнения задания, результаты, доказательства и выводы по выполненному заданию, ответственных по ролям и описание выполненных ими функций;

4. Четвертый этап «Подведение итогов работы в малых группах»:

– выступление докладчика с отчетом по работе в малых группах. При докладе отчета можно использовать мультимедийные презентации;

– оценка преподавателем обучающихся.

Деление обучающихся на группы – это важный момент в организации работы в малых группах. Способов деление обучающихся на группы существует множество, и они в значительной степени определяют то, как будет протекать дальнейшая работа в группе, и на какой результат эта группа выйдет.

Способы деления обучающихся на группы:

1. По желанию.

Объединение в группы происходит по взаимному выбору. Задание на формирование группы по желанию может даваться, как минимум, в двух вариантах:

– разделитесь на группы по ... человек.

– разделитесь на ... равные группы.

2. Случайным образом.

Группа, формируемая по признаку случайности, характеризуется тем, что в ней могут объединяться (правда, не по взаимному желанию, а волей случая) обучающиеся, которые в иных условиях никак не взаимодействуют между собой либо даже враждуют. Работа в такой группе развивает у участников способность приспосабливаться к различным условиям деятельности и к разным деловым партнерам.

Этот метод формирования групп полезен в тех случаях, когда перед преподавателем стоит задача научить обучающихся сотрудничеству. В этом случае преподаватель должен обладать достаточной компетентностью в работе с межличностными конфликтами.

Способы формирования «случайной» группы: жребий; объединение тех, кто сидит рядом (в одном ряду, в одной половине аудитории); с помощью импровизированных «фантов» (один из обучающихся с закрытыми глазами называет номер группы, куда отправится обучающийся, на которого указывает в данный момент преподаватель) и т.п.

3. По определенному признаку.

Такой признак задается либо преподавателем, либо любым обучающимся. Так, можно разделиться по первой букве имени (гласная – согласная), в соответствии с тем, в какое время года родился (на четыре группы), по цвету глаз (карие, серо-голубые, зеленые) и так далее.

Этот способ деления интересен тем, что, с одной стороны, может объединить обучающихся, которые либо редко взаимодействуют друг с другом, либо вообще испытывают эмоциональную неприязнь, а с другой – изначально задает некоторый общий признак, который сближает объединившихся. Есть нечто, что их роднит и одновременно отделяет от других. Это создает основу для эмоционального принятия друг друга в группе и некоторого отдаления от других (по сути дела – конкуренции).

4. По выбору «лидера».

«Лидер» в данном случае может либо назначаться преподавателем (в соответствии с целью, поэтому в качестве лидера может выступать любой обучающийся), либо выбираться обучающимися. Формирование групп осуществляется самими «лидерами». Например, они по очереди называют имена тех, кого они хотели бы взять в свою группу. Наблюдения показывают, что в первую очередь «лидеры» выбирают тех, кто действительно способен работать и достигать результата. Иногда даже дружба и личные симпатии отходят на второй план.

В том случае если в аудитории есть явные аутсайдеры, для которых ситуация набора в команду может быть чрезвычайно болезненной, лучше или не применять этот способ, или сделать их «лидерами».

5. По выбору преподавателя.

В этом случае преподаватель создает группы по некоторому важному для него признаку, решая тем самым определенные педагогические задачи. Он может объединить обучающихся с близкими интеллектуальными возможностями, со схожим темпом работы, а может, напротив, создать равные по силе команды. При этом организатор групповой работы может объяснить принцип объединения, а может уйти от ответа на вопросы участников по этому поводу.

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков по дисциплине

3.1 Балльно-рейтинговая система оценки успеваемости по дисциплине

Студенту в ходе изучения дисциплины предоставляется возможность набрать не более 60 баллов за текущую работу в семестре и до 40 баллов, включительно, на экзамене.

Результирующая оценка по дисциплине складывается из суммы баллов текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзамена. К экзамену допускаются студенты, посетившие не менее 30% лекций и практических занятий, с рейтингом не менее 30 баллов по результатам текущего контроля успеваемости. Текущий контроль по лекционному материалу осуществляет лектор. Текущий контроль по практическим занятиям выполняет преподаватель, проводивший эти занятия.

Баллы за текущую работу в каждом семестре по дисциплине складываются из следующих видов деятельности студента.

Нормативы реализации балльно-рейтинговой системы

1 курс, 1 семестр

№ п/п	Деятельность студента для начисления баллов	Количество баллов
1	Посещение лекционных занятий и наличие конспектов лекций	9
2	Выполнение контрольных работ	49
3	Самостоятельная работа студентов	2
	Всего за семестр (не более)	60

1 курс, 2 семестр

№ п/п	Деятельность студента для начисления баллов	Количество баллов
1	Посещение лекционных занятий и наличие конспектов лекций	18
2	Выполнение контрольных работ	33
3	Самостоятельная работа студентов	9
	Всего за семестр (не более)	60